Zu Abschnitt 8.1

8.1.1 $F :]\,0,+\infty\,[\, \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei durch

$$F(t,x) := t^{-n/2} e^{-\|x\|^2/4t},$$

definiert, wo $\|\cdot\|$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Man zeige, dass F dann die so genannte *Wärmeleitungsgleichung* löst:

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} F = 0.$$

Bemerkung: Der Differentialoperator

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

wird *Laplaceoperator* genannt; formal ist $\Delta = \langle \nabla, \nabla \rangle$.
$F : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

$$F(t,x) := t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}$$

wo $\|\cdot\|$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Dann löst F die sog. *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} F = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} F$$

Bem.: Der Differentialoperator $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ wird *Laplaceoperator* genannt; formal ist $\Delta = \langle \nabla, \nabla \rangle$.

Man bestimmt zunächst die partielle Ableitung von F nach t:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} F(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right) \\
&= -\frac{n}{2} \cdot t^{-\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} + t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \frac{\|x\|^2}{4t^2} \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t} \right)
\end{aligned}$$

Um ΔF zu bestimmen, bestimmt man zunächst $\frac{\partial}{\partial x_k} F$ für bel., aber festes $1 \le k \le n$:
Zunächst ist wegen $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \|x\|^2 = 2x_k$$

damit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} F(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \right) \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x_k}{4t} \right) \\
&= -t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \frac{x_k}{2t}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} F(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \frac{x_k}{2t}\right) \\
&= -t^{-\frac{n}{2}} \cdot \left[\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{x_k}{2t}\right) \cdot \frac{x_k}{2t} + \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \frac{1}{2t}\right] \\
&= -t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{1}{2t} - \frac{x_k^2}{4t^2}\right) \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{x_k^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right)
\end{aligned}$$

Nun kann man ΔF bestimmen, es gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta F(x,t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} F(x,t) \\
&= \sum_{k=1}^{n} t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{x_k^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\right) \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{4t^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2t}\right) \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{n} 1\right) \\
&= t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} \cdot \left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right)
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial t} F$$

und F erfüllt damit die Wärmeleitungsgleichung. Das war aber zu zeigen.

8.1.2 Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \log(\|x\|) & \text{falls } n = 2 \\ \|x\|^{2-n} & \text{falls } n \geq 3. \end{cases}$$

Berechnen Sie Δf.
Zunächst ist für jedes n und $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|x\|^2 = 2x_i$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} \|x\| &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \\
&= \frac{1}{2\|x\|} \cdot \frac{\partial \sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\partial x_i} \\
&= \frac{x_i}{\|x\|}.
\end{aligned}$$

- Es sei zunächst $n = 2$. Für $i \in \{1, 2\}$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\|x\|}\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{\|x\|^2} \\
&= \frac{\|x\|^2 - x_i \cdot 2x_i}{\|x\|^4} \\
&= \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^4}
\end{aligned}$$

  also ist

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{\|x\|^2 - 2x_i^2}{\|x\|^4} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{2} \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{2} x_i^2}{\|x\|^4} \\
&= \frac{2\|x\|^2 - 2\|x\|^2}{\|x\|^4} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Für $n \geq 3$ haben wir mit $1 \leq i \leq n$ zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left((2-n)\|x\|^{1-n}\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|\right) \\
&= (2-n)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{\|x\|^n} \\
&= (2-n)\frac{\|x\|^n - x_i \cdot x_i \cdot n \cdot \|x\|^{n-2}}{\|x\|^{2n}} \\
&= (2-n)\frac{\|x\|^2 - nx_i^2}{\|x\|^{n+2}}
\end{aligned}$$

  also ist

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2-n)\frac{\|x\|^2 - nx_i^2}{\|x\|^{n+2}} \\
&= (2-n)\frac{n\|x\|^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\|x\|^{n+2}} \\
&= (2-n)\frac{n\|x\|^2 - n\|x\|^2}{\|x\|^{n+2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Also gilt $\Delta f = 0$ für jedes $n \geq 2$.

8.1.3 Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist. Zeigen Sie für das durch $g(x) := \operatorname{grad} f(x)$ definierte Vektorfeld $g : U \to \mathbb{R}^n$, dass dann $\partial g_i / \partial x_j = \partial g_j / \partial x_i$ für alle i, j gilt. (Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.)

Es ist für $x \in U$ und $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \\
&\overset{f \in C^2(U),\ \text{Satz von Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) \\
&= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x).
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

8.1.4 Es wurde gezeigt, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Auf unendlich-dimensionalen Räumen stimmt das nicht. Finden Sie – für beliebige Intervalle $[a, b]$ mit $a < b$ – zwei nicht-äquivalente Normen auf $C[a, b]$.
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig, betrachte auf $C[a, b]$ die Normen

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$$

und

$$\|f\|_\infty := \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Betrachte weiter für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_\infty &= \sup_{a \leq x \leq b} \left|\frac{x-a}{b-a}\right|^n \\
&\leq \left|\frac{b-a}{b-a}\right|^n \\
&= 1, \\
\|f_n\|_1 &= \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n dx \\
&= \frac{1}{(b-a)^n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (b-a)^{n+1} \\
&= \frac{b-a}{n+1}
\end{aligned}$$

Angenommen nun $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ wären äquivalent, dann gäbe es $C \geq 0$ mit

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_\infty &\leq C\|f_n\|_1 \\
&= C \cdot \frac{b-a}{n+1}
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, es folgt

$$1 = \|f_n\|_\infty \leq C \cdot \frac{b-a}{n+1} \to 0,$$

also der Widerspruch $1 \leq 0$.
Also sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ zwei nicht äquivalente Normen auf $C[a, b]$.

8.1.5 Sei $g \in C[a, b]$. Definiere $\|f\|_g$ für $f \in C[a, b]$ durch

$$\|f\|_g := \|fg\|_\infty.$$

(a) Unter welchen Voraussetzungen an g ist $\|\cdot\|_g$ eine Norm?

(b) Finden Sie ein Beispiel für eine Funktion g, für die $\|\cdot\|_g$ eine Norm ist, die *nicht* äquivalent zur Supremumsnorm ist. Finden Sie auch Beispiele, in denen zur Supremumsnorm äquivalente Normen entstehen.

1. Beh.: $\|\cdot\|_g$ ist genau dann eine Norm, wenn eine Menge $A \subset [\,a,b\,]$ existiert, so dass $A^\circ = \emptyset$ und $|g|\big|_{\complement A} > 0$ gilt.

   Bemerke zunächst, dass $\complement A$ wegen
   $$(\complement A)^- = \complement(A^\circ) = \complement\emptyset = [\,a,b\,]$$
   dicht in $[\,a,b\,]$ liegt.

   $\Leftarrow$ (a) Zunächst ist
   $$\|0\|_g = \|g0\|_\infty = \|0\|_\infty = 0.$$
   Sei andererseits $f \in C\,[\,a,b\,]$ mit $\|f\|_g = 0$, d.h. $\|fg\|_\infty = 0$, da $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm ist, folgt $|fg| = 0$, wegen $|g|\big|_{\complement A} > 0$ folgt also $f|_{\complement A} = 0$, da $\complement A$ dicht liegt, folgt $f = 0$ wegen der Stetigkeit von f.

   (b) Für $c, d \in C\,[\,a,b\,]$ ist
   $$\begin{aligned}\|c+d\|_g &= \|g(c+d)\|_\infty \\ &= \|gc+gd\|_\infty \\ &\leq \|gc\|_\infty + \|gd\|_\infty \\ &= \|c\|_g + \|d\|_g.\end{aligned}$$

   (c) Für $f \in C\,[\,a,b\,]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist
   $$\begin{aligned}\|\lambda f\|_g &= \|g\lambda f\|_\infty \\ &= |\lambda|\|gf\|_\infty \\ &= |\lambda|\|f\|_g.\end{aligned}$$

   Also ist $\|\cdot\|_g$ eine Norm.

   $\Leftarrow$ Es reicht zu zeigen, dass $B := \{x \mid |g(x)| > 0\}$ dicht in $[\,a,b\,]$ liegt, denn dann ist $A := \complement B$ wie gefordert.

   Sei also $x_0 \in [\,a,b\,]$ und $\varepsilon > 0$. Angenommen es wäre $K_\varepsilon(x_0) \cap B = \emptyset$, betrachte dann die Funktion
   $$f : [\,a,b\,] \to \mathbb{R}\,, x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \varepsilon \\ 1 + \varepsilon^{-1}(x - x_0) & x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 \\ 1 - \varepsilon^{-1}(x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \\ 0 & x_0 + \varepsilon \leq x \end{cases}$$

   Dann ist $f \in C\,[\,a,b\,]$, $f \neq 0$ (da $f(x_0) = 1$), aber es ist $fg = 0$, da
   $$\{x \mid |(fg)(x)| > 0\} \subset \{x \mid |f(x)| \geq 0\} = K_\varepsilon(x_0)$$
   und
   $$\{x \mid |(fg)(x)| > 0\} \subset \{x \mid |g(x)| > 0\} = B$$
   also auch
   $$\{x \mid |(fg)(x)| > 0\} \subset B \cap K_\varepsilon(x_0) = \emptyset.$$
   Es folgte aber $\|f\|_g = \|0\|_\infty = 0$, im Widerspruch zur Normeigenschaft von g. Also ist $B \cap K_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset$ und damit ist alles gezeigt.

2. Man zeigt, dass $\|\cdot\|_g$ genau dann zur Supremumsnorm äquivalent ist, wenn $|g(x)| > 0$ für alle $x \in [\,a,b\,]$ gilt:

$\Leftarrow$ Sei also $|g(x)| > 0$ für alle $x \in [a,b]$, da $|g|$ stetig ist und $[a,b]$ kompakt, existieren $x_u, x_o \in [a,b]$ so dass für $x \in [a,b]$:

$$0 < c := |g(x_u)| \leq |g(x)| \leq |g(x_o)| =: C$$

Für jedes $f \in C[a,b]$ gilt dann

$$\begin{aligned} c\|f\|_\infty &= \|cf\|_\infty \\ &= \sup_{a \leq x \leq b} c|f(x)| \\ &\leq \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)||f(x)| \\ &= \|fg\|_\infty \\ &= \|f\|_g \\ &= \sup_{a \leq x \leq b} |g(x)||f(x)| \\ &\leq \|Cf\|_\infty \\ &= C\|f\|_\infty . \end{aligned}$$

Also sind $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_g$ äquivalent.

$\Rightarrow$ Man zeigt die logische Umkehr, d.h. man zeigt, dass aus $g(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$ folgt, dass $\|\cdot\|_g$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent sind.
Sei also $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) = 0$. Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\delta_n > 0$, so dass für $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| \leq \delta_n$ stets $|g(x)| \leq 1/n$ ist. Definiere weiter

$$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq x_0 - \delta_n \\ 1 + \delta_n^{-1}(x - x_0) & x_0 - \delta_n \leq x \leq x_0 \\ 1 - \delta_n^{-1}(x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_0 + \delta_n \\ 0 & x_0 + \delta_n \leq x \end{cases}$$

Dann ist $\|f_n\|_\infty \geq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, da $f_n(x_0) = 1$ für alle n. Andererseits aber ist

$$\begin{aligned} \|f_n\|_g &= \|gf_n\|_\infty \\ &= \sup_{a \leq x \leq b} |(f_n g)(x)| \\ &\leq \sup_{|x - x_0| \leq \delta_n} |f_n(x)||g(x)| \\ &\leq \sup_{|x - x_0| \leq \delta_n} 1 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \to 0 \end{aligned}$$

Also ist (f_n) eine $\|\cdot\|_g$–Nullfolge, die keine $\|\cdot\|_\infty$–Nullfolge ist, was die Nicht–Äquivalenz der Normen zeigt.

Nun lassen sich leicht Beispiele finden: $g(x) = x - \xi$ erzeugt für alle $\xi \ni \mathbb{R}$ Normen, die genau für $x \notin [a,b]$ zur Supremumsnorm äquivalent sind, die von $g(x) = (x-a)^2$ erzeugte Norm ist nicht zur Supremumsnorm äquivalent, $\kappa\tau\lambda$

Zu Abschnitt 8.2

8.2.1 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y,z) = (x^2 + y)e^z$ definiert.

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von f im Punkt (x,y,z).

(b) Werten Sie diese bei $(x,y,z) = (2,1,0)$ aus und berechnen Sie damit näherungsweise $f(2.01, 0.99, 0.01)$.

1. Es ist

$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) \\ &= \left(2x\mathrm{e}^z, \mathrm{e}^z, (x^2 + y)\mathrm{e}^z\right) \end{aligned}$$

2. Zunächst ist
$$f'(2,1,0) = (4,1,5)$$
und damit
$$\begin{aligned} f(2.01, 0.99, 0.01) &\approx f(2,1,0) + f'(2,1,0)(0.01, -0.01, 0.01)^{\perp} \\ &= 5 + (4,1,5)(0.01,-0.01,0.01)^{\perp} \\ &= 5 + 0.08 \\ &= 5.08 \end{aligned}$$

8.2.2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Man zeige, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ überall auf dem $\mathbb{R}^2$ existieren und dass f nicht stetig ist.
Warum widerspricht das nicht Satz 8.2.3? Verweis richtig??
Für $(x,y) \neq (0,0)$ existieren $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$, da f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ als Kompositum stetig diff'bar Funktionen stetig differenzierbar ist, dort gilt
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)} \end{aligned}$$
Betrachte nun $0 \in \mathbb{R}^2$, für $h \neq 0$ ist
$$\begin{aligned} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} &= \frac{0-0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$
Also existiert
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
wegen $f(0,h) = 0$ für alle h folgt analog
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Also existieren $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ überall auf $\mathbb{R}^2$, f ist in 0 aber nicht stetig, da
$$\begin{aligned} f(h,h) &= \frac{h^2}{h^2+h^2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\to \frac{1}{2}, \quad h \to 0 \\ &\neq 0 = f(0,0). \end{aligned}$$
Dies widerspricht Satz 8.2.3 nicht, da f in Null nicht differenzierbar ist: Es ist nämlich:
$$\begin{aligned} \frac{f(h,h) - f(0)}{\|(h,h)\|^2} &= \frac{1/2 - 0}{h\sqrt{2}} \\ &= 2^{-3/2} \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

und das konvergiert für $h \to 0$ nicht.

8.2.3 Beweisen Sie, dass Summen und Vielfache differenzierbarer Abbildungen wieder differenzierbar sind
Sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in U$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned}(f+\lambda g)(x_0+h) &= f(x_0+h)+\lambda g(x_0+h)\\ &= f(x_0)+f'(x_0)h+o(\|h\|)+\lambda g(x_0)+\lambda g'(x_0)h+\lambda o(\|h\|)\\ &= (f+\lambda g)(x_0)+\big(f'(x_0)+\lambda g'(x_0)\big)h+o(\|h\|)\end{aligned}$$

für $h \to 0$, da

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)+\lambda o(\|h\|)}{\|h\|} &= \lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)}{h}+\lambda\lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}\\ &= 0+\lambda 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

also $o(\|h\|)+\lambda o(\|h\|)=o(\|h\|)$.
Also ist $f+\lambda g$ in x_0 differenzierbar mit

$$(f+\lambda g)'(x_0)=f'(x_0)+\lambda g'(x_0)$$

Für die Spezialfälle $\lambda = 1$ resp. $f = 0$ folgt die Behauptung über Summen und Vielfache.

8.2.4 Auf Seite **??** wurde definiert, was es bedeutet, dass eine Funktion ein $o(h)$ ist. Man beweise oder widerlege für Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \,]\,0, +\infty\,[$:

Verweis richtig??

(a) Mit φ ist auch $\sqrt{\varphi}$ ein $o(h)$.
(b) Mit φ und ψ ist $a\varphi + b\psi$ ein $o(h)$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.
(c) Mit φ, ψ ist auch φ/ψ ein $o(h)$.

1. Falsch.
   Mit $\varphi(h) = \|h\|^{3/2}$ ist $\varphi(h) = o(h)$ für $h \to 0$, denn

   $$\frac{\varphi(h)}{\|h\|}=\|h\|^{1/2}\to 0,\quad h\to 0,$$

   aber $\sqrt{\varphi}(h) \neq o(h)$, denn

   $$\frac{\sqrt{\varphi(h)}}{\|h\|}=\frac{\|h\|^{3/4}}{\|h\|}=\|h\|^{-1/4}\to\infty, h\to 0$$

2. Richtig.
   Seien $a, b \in \mathbb{R}$, dann ist

   $$\begin{aligned}\frac{(a\varphi+b\psi)(h)}{\|h\|} &= a\cdot\frac{\varphi(h)}{\|h\|}+b\cdot\frac{\psi(h)}{\|h\|}\\ &\to a\cdot 0+b\cdot 0\\ &= 0,\quad h\to 0\end{aligned}$$

   also $a\varphi(h) + b\psi(h) = o(h)$ für $h \to 0$.

3. Falsch.
   Mit $\varphi(h) = \|h\|^2$ und $\psi = \varphi$ ist

   $$\frac{\varphi(h)}{\|h\|}=\|h\|\to 0,\quad h\to 0$$

   also $\varphi(h) = \psi(h) = o(h)$, aber

   $$\frac{(\varphi/\psi)(h)}{\|h\|}=\frac{1}{\|h\|}\to\infty,\quad h\to 0$$

   also $(\varphi/\psi)(h) \neq o(h)$ für $h \to 0$.

8.2.5 Geben Sie ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an, für die $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ surjektiv ist.
Betrachte $f = \|\cdot\|_2^2$, es ist für $x \in \mathbb{R}^n$ und $1 \le i \le n$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i$$

also

$$(\operatorname{grad} f)(x) = 2x$$

und $x \mapsto x$ ist surjektiv.

8.2.6 Es sei $f(p,q) = -p/2 + \sqrt{(p^2/4) - q}$, diese Funktion sei auf $\{(p,q) \mid p^2 > 4q\}$ definiert. (Damit ist $f(p,q)$ die größere der zwei Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$.)
Bestimmen Sie $\operatorname{grad} f$ bei $(0,-4)$ und geben Sie eine Approximationsformel für die größere der Lösungen von $x^2 - 0.02x - 3.9 = 0$ an.
Also zunächst haben wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial p}(p,q) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \cdot \frac{p}{2} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{p}{4\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \\
\frac{\partial f}{\partial q}(p,q) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \cdot (-1) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial p}(0,-4) &= -\frac{1}{2} + \frac{0}{4\sqrt{\frac{0}{4} + 4}} \\
&= -\frac{1}{2} \\
\frac{\partial f}{\partial q}(0,-4) &= -\frac{1}{2\sqrt{\frac{0}{4} + 4}} \\
&= -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

und damit erhalten wir, dass für die größere der Nullstellen von $x^2 - 0.02x - 3.9 = 0$, also für $f(-0.02, -3.9)$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(-0.02,-3.9) &\approx f(0,-4) + f'(p,q)(-0.02,-0.1)^{\perp} \\
&= 2 + 0.01 + 0.025 \\
&= 2.035.
\end{aligned}$$

Damit ist alles getan.

Zu Abschnitt 8.3

8.3.1 Sei $f(x) := \|x\|^2$. Berechnen Sie alle möglichen partiellen Ableitungen (beliebig hoher Ordnung) von f.
Es ist zunächst für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2$$

also für $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial x_i}{}^2_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} 2x_\nu \delta_{i\nu} \\
&= 2x_i
\end{aligned}$$

Damit ist für $1 \leq i, j \leq n$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} 2x_i \\
&= 2\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Sei nun $k \geq 3$ und seien $1 \leq i_\nu \leq n$ für $1 \leq \nu \leq k$, dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x) &= \frac{\partial^{k-3}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-3}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}(x) \\
&= \frac{\partial^{k-3}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-3}}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-2}}} 2\delta_{i_{k-1} i_k} \\
&= \frac{\partial^{k-3}}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-3}}} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

8.3.2 Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

f ist zweimal partiell differenzierbar, aber die gemischten partiellen Ableitungen stimmen bei Null nicht überein. (Der Satz von H.A. Schwarz zeigt, dass man die Gleichheit unter schwachen Zusatzvoraussetzungen garantieren kann.)
Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist f als rationale Funktion glatt, als auch zweimal partiell differenzierbar, dort ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\big(y(x^2 - y^2) + xy \cdot 2x\big)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{(3x^2 y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x^4 y + 2x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\big(x(x^2 - y^2) - xy \cdot 2y\big)(x^2 + y^2) - xy(x^2 - y^2) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2x^3 y^2 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{(5x^4 - 12x^2 y^2 - y^4)(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^4} \\
&\quad - \frac{(x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4)(4x^3 + 4xy^2)}{(x^2 + y^2)^4}
\end{aligned}$$

Da f auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ glatt ist, ist dort nach dem Satz von Schwarz dort sicher $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$.

Es bleibt also $(0,0)$ zu untersuchen, es ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\
&= 0.\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^5-0-0}{h^4}\\
&= \lim_{h\to 0} 1\\
&= 1.\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{0+0-h^5}{h^4}\\
&= -1.
\end{aligned}$$

Also ist f zweimal partiell differenzierbar und $\partial^2 f/\partial x\partial y(0,0)\neq\partial^2 f/\partial y\partial x(0,0)$.

8.3.3 Es sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ durch $f(x,y):=(x-y)^3$ definiert.
Berechnen Sie $\big(\langle(1,2),\nabla\rangle\big)^2 f(x,y)$.
Zunächst berechnet man die partiellen Ableitungen von f bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3(x-y)^2\cdot 1\\
&= 3(x-y)^2\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 3(x-y)^2\cdot(-1)\\
&= -3(x-y)^2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 6(x-y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= -6(x-y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 6(x-y)
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\big(\langle(1,2),\nabla\rangle^2 f\big)(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\\
&= (x-y)(6+4(-6)+4\cdot 6)\\
&= 6(x-y).
\end{aligned}$$

8.3.4 Nach dem Mittelwertsatz kann man $f(x_0+h)-f(x_0)$ stets mit einem geeigneten t_0 als $\langle h,\operatorname{grad} f(x_0+t_0h)\rangle$ schreiben.
Finden Sie ein derartiges t_0 für den Fall $f(x,y)=x^2+y^2$, $x_0=(0,0)$ und $h=(2,1)$.
Zunächst ist für $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sicher

$$(\operatorname{grad} f)(x,y)=(2x,2y)=2(x,y).$$

und damit für $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= f(2,1) - f(0,0) \\ &= 5 \\ \langle h, (\operatorname{grad} f)(x_0 + t_0 h)\rangle &= \langle (2,1), 2(2t_0, t_0)\rangle \\ &= 8t_0 + t_0 \\ &= 9t_0 \end{aligned}$$

also ist

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= \langle h, (\operatorname{grad} f)(x_0 + t_0 h)\rangle \\ \iff 5 &= 9t_0 \\ \iff t_0 &= \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

8.3.5 Machen Sie sich klar, dass der eindimensionale Mittelwertsatz 4.2.2 ein Spezialfall von Korollar **??** ist.

Verweis richtig??

Es sei also $n = 1$, dann besagt Korollar 4.2.2 doch, das für $f : U \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset \mathbb{R}$ offen, f stetig differenzierbar, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}$ mit $[\,x, x+h\,] \subset U$ ein $t \in \,]\,0,1\,[$ existiert, so dass

$$f(x+h) - f(x) = \langle h, (\operatorname{grad} f)(x+th)\rangle$$

nun ist in $\mathbb{R}$ der Gradient die Ableitung und das Skalarprodukt wird zur gewöhnlichen Multiplikation, d.h. es ist

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+th)h$$

Schreibt man nun $y := x+h$, $\xi := x + th$, so ist $\xi \in \,]\,x, y\,[$ und $h = y - x$, also:

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) \iff f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Das ist aber genau die Aussage des eindimensionalen Mittelwertsatzes.

8.3.6 In welcher Richtung ist die Richtungsableitung maximal?
(Zur Lösung dieser Aufgabe benötigt man Abschnitt 8.9)
Wir betrachten ein $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $n \geq 2$ ist, und ein $x \in U$. Eine „Richtung“ im $\mathbb{R}^n$ können wir doch durch ein $h \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ ausdrücken, d.h. wir haben

$$g : h \mapsto \partial_h f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i$$

unter der Nebenbedingung $F(h) := \sum_{i=1}^n h_i^2 - 1 = 0$ zu minimieren. Mit der Methode der Langrange–Multiplikatoren haben wir also das Gleichungssystem

$$g'(h) = \lambda F'(h), \quad F(h) = 0$$

zu lösen. Zunächst ist für $1 \leq j \leq n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial h_j}(h) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{\partial h_i}{\partial h_j} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \\ \frac{\partial F}{\partial h_j}(h) &= 2h_j \end{aligned}$$

also folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2\lambda h_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

und damit im Fall $f'(x) \neq 0$, dass $\lambda \neq 0$, also

$$h_j = \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad 1 \leq j \leq n$$

nun ist

$$\begin{aligned} F(h) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4\lambda^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{4\lambda^2} \|\operatorname{grad} f(x)\|_2^2 - 1 \\ &= 0 \\ \iff \lambda^2 &= \frac{1}{4} \|\operatorname{grad} f(x)\|_2^2 \\ \iff \lambda &= \pm \frac{1}{2} \|\operatorname{grad} f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Nun ist also das Maxinum unter den Richtungen

$$h = \pm \frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|_2}$$

zu suchen (im Falle $\operatorname{grad} f(x) = 0$ folgt $\lambda = 0$ und damit, dass alle $h \in \mathbb{R}$ lokale Maxima sind, dann ist die Richtungsableitung konstant 0).
Das g sein Maximum in $\frac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|_2}$ annimmt und das die andere Extremalstelle ein Minimum ist, wurde bereits begründet. Die Richtungsableitung ist also in Richtung des Gradienten maximal.

Zu Abschnitt 8.4

8.4.1 $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ und $y^{(1)}, \ldots, y^{(l)}$ seien paarweise verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^n$. Finden Sie eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die bei den $x^{(i)}$ jeweils ein lokales Minimum und bei den $y^{(j)}$ jeweils ein lokales Maximum hat.
Betrachte zunächst $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-x^{-2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

in Band I wurde gezeigt, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$f'(x) = \begin{cases} -2x^{-3} e^{-x^{-2}} & x > 0 \\ ß & x \leq 0 \end{cases}$$

Definiere nun $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\varphi(x) := e^{e^2} \cdot f\big(e^{-1} - f(1-x)\big)$$

Dann gilt:

- $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ als Komposition glatter Funktionen.
- Für $x \leq 0$ ist $\varphi(x) = 0$, denn dann ist $1 - x \geq 1$, d. h. $-(1-x)^2 \leq -1$, also $-(1-x)^{-2} \geq -1$, und damit

$$\begin{aligned} \alpha(x) &:= e^{-1} - f(1-x) \\ &= e^{-1} - e^{-(1-x)^{-2}} \\ &\leq e^{-1} - e^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

  also

$$\varphi(x) = e^{e^2} f\big(\alpha(x)\big) = 0$$

- Für $x \geq 1$ ist $\varphi(x) = 1$, denn dann ist $1 - x \leq 0$, also $f(1-x) = 0$, und damit

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \cdot f\big(\mathrm{e}^{-1} - f(1-x)\big)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \cdot f\big(\mathrm{e}^{-1}\big)\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^2}\\ &= \mathrm{e}^0\\ &= 1.\end{aligned}$$

- φ ist monoton steigend und streng monoton auf $]\,0,1\,[$, denn für $x \in\,]\,0,1\,[$ gilt zunächst
$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2} \cdot f'\big(\mathrm{e}^{-1} - f(1-x)\big) \cdot f'(1-x)$$
da $1 - x$ positiv, gilt auch $f'(1-x) > 0$, weiterhin ist
$$f(1) = \mathrm{e}^{-1} > f(1-x)$$
wegen der Monotonie von f, also ist $\mathrm{e}^{-1} - f(1-x) > 0$, d.h. es ist
$$f'\big(\mathrm{e}^{-1} - f(1-x)\big) > 0$$
und damit $\varphi'(x) > 0$, was die Behauptung zeigt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, definiere $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch
$$\psi_{\varepsilon,1}(x) := \varphi\left(\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}\right)\varphi\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon}\right)$$
Dann gilt

- $\psi_{\varepsilon,1} \in C^\infty(\mathbb{R})$ als Kompositum glatter Funktionen.
- $\psi_{\varepsilon,1}(0) = 1$, denn
$$\psi_{\varepsilon,1}(0) = \varphi(1) \cdot \varphi(1) = 1$$
- $\psi_{\varepsilon,1}(x) = 0$ für $|x| \geq \varepsilon$, denn für $x > \varepsilon$ ist $\varepsilon - x < 0$, also
$$\psi_{\varepsilon,1}(x) = \varphi\left(\frac{x+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \cdot 0 = 0,$$
und für $x < -\varepsilon$ ist $x + \varepsilon < 0$, also
$$\psi_{\varepsilon,1}(x) = 0 \cdot \varphi\left(\frac{\varepsilon - x}{\varepsilon}\right)$$
- $0 < \psi_{\varepsilon,1}(x) < 1$ für $0 < |x| < \varepsilon$, denn für $-\varepsilon < x < 0$ ist
$$0 < \frac{x+\varepsilon}{\varepsilon} < 1$$
und für $0 < x < \varepsilon$ ist
$$0 < \frac{\varepsilon - x}{\varepsilon} < 1$$
und die Aussage folgt aus den Eigenschaften von φ.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig, definiere $\psi_{n,\varepsilon} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch
$$\psi_{n,\varepsilon}(x) := \psi_{1,\varepsilon}\big(\|x\|_2\big)$$
Dann gilt $\psi_{n,\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es ist $\psi_{n,\varepsilon}(0) = 1$, $0 < \psi_{n,\varepsilon}(x) < 1$ für $0 < \|x\|_2 < \varepsilon$ und $\psi_{n,\varepsilon}(x) = 0$ für $\|x\|_2 \geq \varepsilon$, insbesondere hat ψ in 0 ein isoliertes lokales Maximum.

Seien nun $x^{(i)}$, $1 \leq i \leq k$, $y^{(j)}$, $1 \leq j \leq \ell$ beliebige paarweise verschiedene Elemente des $\mathbb{R}^n$. Es sei nun
$$A = \{x^{(i)} : 1 \leq i \leq k\} \cup \{y^{(j)} : 1 \leq j \leq \ell\}$$
und
$$\varepsilon := \frac{1}{4} \cdot \min_{\substack{a,b \in A\\ a \neq b}} \|a - b\|_2.$$

dann haben je zwei der gegebenen Punkte mindestens den Abstand 4ε, insbesondere existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ höchstens ein $a \in A$ mit $\|x-a\|_2 \leq \varepsilon$. Definiere nun $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$\chi(x) := \sum_{i=1}^{k} \psi_{\varepsilon,n}(x - x^{(i)}) - \sum_{j=1}^{\ell} \psi_{\varepsilon,n}(x - y^{(j)})$$

dann hat χ die geforderten Eigenschaften:

- $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ als Komposition glatter Funktionen.
- Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist höchstens einer der auftretenden Summanden von Null verschieden, da für höchstens ein $a \in A$ auch $\|x-a\|_2 < \varepsilon$ ist, genau dann ist $\psi_{n,\varepsilon}(x-a)$ verschieden von Null.
  Also ist $-1 < \chi(x) < 1$ für $x \notin A$ und
  $$\chi(x^{(i)}) = \psi_{n,\varepsilon}(0) = 1, \quad 1 \leq i \leq k$$
  sowie
  $$\chi(y^{(j)}) = -\psi_{n,\varepsilon}(0) = -1, \quad 1 \leq j \leq \ell$$
  und damit sind $x^{(i)}$ resp. $y^{(j)}$ sogar globale Maxima resp. Minima.

Also ist alles gezeigt.

8.4.2 Welcher Quader mit Volumen V hat minimale Kantenlänge?
Für einen Quader mit den positiven Kantenlängen x,y und z ist das Volumen durch $V = xyz$ gegeben, also ist

$$z = \frac{V}{xy}$$

Die Kantenlänge L ist damit durch

$$\begin{aligned} L(x,y) &= 4\big(x + y + z(x,y)\big) \\ &= 4\left(x + y + \frac{V}{xy}\right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y) &= 4\left(1 - \frac{V}{x^2 y}\right) \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y) &= 4\left(1 - \frac{V}{x y^2}\right) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{8V}{x^3 y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{4V}{x^2 y^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{8V}{x y^3} \end{aligned}$$

Notwendig für ein Extremum ist $\operatorname{grad} L(x,y) = 0$, d.h.

$$\begin{array}{rccc} & 4 - \dfrac{4V}{x^2 y} = 0 & \wedge & 4 - \dfrac{4V}{xy^2} = 0 \\ \overset{x,y>0}{\Longleftrightarrow} & V = x^2 y & \wedge & V = xy^2 \\ \Longleftrightarrow & xy^2 = x^2 y & \wedge V = xy^2 & \\ \overset{x,y>0}{\Longleftrightarrow} & x = y & \wedge & V = x^3 \\ \overset{x,V>0}{\Longleftrightarrow} & x = y & = & \sqrt[3]{V} \end{array}$$

Aus $z = V/(xy)$ folgt nun $z = \sqrt[3]{V} = x = y$, der gesuchte Quader ist also ein Würfel, seine Kantenlänge ist durch

$$L = 12\sqrt[3]{V}$$

gegeben.

8.4.3 Eine Säule habe als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck. Wie muss sie aussehen, damit sie bei vorgegebener Oberfläche ein maximales Volumen hat? Wie, falls bei vorgegebenem Volumen die Kantenlänge minimal sein soll?
Es bezeichne a die Seitenlänge des Grunddreicks, h die Höhe der Säule, G den Flächeninhalt des Grunddreiecks, O die Oberfläche, V das Volumen und L die Gesamtkantenlänge der Säule, dann gilt zunächst:

$$\begin{aligned}
G &\overset{\text{Heronsche Formel}}{=} \sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{8}a^3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \\
V &= G \cdot h \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h \\
O &= 2G + 3ah \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3ah \\
L &= 6a + 3h.
\end{aligned}$$

- Sei zunächst die Oberfläche O gegeben, wir haben dann

$$h = \frac{O}{3a} - \frac{1}{4\sqrt{3}}a$$

und damit ist

$$\begin{aligned}
V(a) &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot h \\
&= \frac{\sqrt{3} \cdot O}{12}a - \frac{1}{16}a^3
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
V'(a) &= \frac{\sqrt{3} \cdot O}{12} - \frac{3}{16}a^2 \\
V''(a) &= -\frac{3}{8}a
\end{aligned}$$

Notwendig für eine Extremalstelle ist $V'(a) = 0$, es gilt

$$\begin{aligned}
V'(a) &= 0 \\
\iff \frac{3}{16}a^2 &= \frac{\sqrt{3} \cdot O}{12} \\
\iff a^2 &= \frac{4O}{3\sqrt{3}} \\
\iff a &= \pm 2 \cdot 3^{-3/4} \cdot sqrtO
\end{aligned}$$

sinnvoll ist nur die postive Kantenlänge, also $a = 2 \cdot 3^{-3/4} \cdot \sqrt{O}$, die Höhe der Säule ist dann

$$\begin{aligned}
h &= \frac{O}{2 \cdot 3^{1/4} \cdot O} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot 3^{-3/4} \cdot \sqrt{O} \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{O} - 3^{-1/2}\frac{1}{2} \cdot 3^{-3/4} \cdot \sqrt{0} \\
&= \frac{\sqrt{O}}{2} \cdot \left(3^{-1/4} - 3^{-5/4}\right)
\end{aligned}$$

Da V'' für positive a negativ ist, ist dies tatsächlich ein Maximum

- Ist das Volumen V gegeben, so gilt

$$h = \frac{4V}{\sqrt{3}a^2}$$

und damit

$$\begin{aligned} L(a) &= 6a + 3h \\ &= 6a + \frac{\sqrt{3} \cdot 4V}{a^2} \end{aligned}$$

wir haben also

$$\begin{aligned} L'(a) &= 6 - \frac{\sqrt{3} \cdot 8V}{a^3} \\ L''(a) &= \frac{\sqrt{3} \cdot 24V}{a^4} \end{aligned}$$

Notwendig für ein Mininum ist $L'(a) = 0$, es gilt

$$\begin{aligned} L'(a) &= 0 \\ \iff 6a^3 &= \sqrt{3} \cdot 8V \\ \iff a^3 &= 3^{-1/2} \cdot 4V \\ \iff a &= 3^{-1/6} \cdot 2^{2/3} \cdot \sqrt[3]{V} \end{aligned}$$

Da $L''(a)$ für postive a postitiv ist, ist dies tatsächlich ein Minimum. Die Höhe ist dann durch

$$\begin{aligned} h &= \frac{4V}{3^{1/2} \cdot 3^{-1/3} \cdot 2^{4/3} \cdot V^{2/3}} \\ &= 2^{2-4/3} \cdot 3^{1/3-1/2} \cdot \sqrt[3]{V} \\ &= 2^{2/3} \cdot 3^{1/6} \cdot \sqrt[3]{V}. \end{aligned}$$

8.4.4 Man beweise oder widerlege:

(a) Summen und positive Vielfache positiv definiter Matrizen sind positiv definit.

(b) Alle A_k seien positiv definite Matrizen, sie sollen komponentenweise gegen eine Matrix A konvergieren. Dann ist auch A positiv definit.

(c) Die Determinante einer negativ definiten Matrix ist negativ.

1. Das ist richtig. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit und $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \langle (A+B)h, h \rangle &= \langle Ah + Bh, h \rangle \\ &= \langle Ah, h \rangle + \langle Bh, h \rangle \\ &\overset{A,\, B \text{ positiv definit}}{>} 0. \end{aligned}$$

Also ist $A + B$ positiv definit.
Sei nun $\lambda > 0$. Für $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ folgt wegen der postiven Definitheit von A:

$$\begin{aligned} \langle (\lambda A)h, h \rangle &= \lambda \langle Ah, h \rangle \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also ist λA positiv definit.

2. Das ist falsch. Es sei $A_k := \frac{1}{k}\mathrm{Id}$ für $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $A_k \to A := 0$ komponentenweise und für $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ ist

$$\langle A_k h, h \rangle = \left\langle \frac{1}{k} h, h \right\rangle = \frac{1}{k} \|h\|_2^2 > 0$$

und

$$\langle Ah, h \rangle = \langle 0h, h \rangle = 0$$

also sind alle A_k postiv definit, ohne dass A es ist.

3. Das stimmt genau dann, wenn n ungerade ist. Ist A negativ definit, so ist $-A$ positiv definit, hat also insbesondere eine positive Determinante, wegen
$$\det A = (-1)^n \det(-A)$$
ist $\det A$ genau dann für alle negativ definiten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ negativ, wenn n ungerade ist.

8.4.5 Für welche α ist die Hessematrix von $x^2 + \alpha xy + y^2$ überall positiv definit?
Es ist zunächst
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x + \alpha y \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \alpha x + 2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \alpha \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2
\end{aligned}$$
Also ist
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}$$
d.h.
$$\det H_f(x,y) = 4 - \alpha^2$$
Nun ist $H_f(x,y)$ genau dann postiv definit, wenn $2 > 0$ und $4 - \alpha^2 > 0$, d.h. genau für alle $\alpha \in \,]-2, 2\,[$.

8.4.6 Finden Sie eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, auf der die Hessematrix der Funktion $x^4 + xy + y^4$ positiv definit ist. Dort ist diese Funktion folglich konvex.
Es sei $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 1/\sqrt{12}\}$, dann ist K konvex, denn für $X = (x,y), \Xi = (\xi, \eta) \in K$ und $\lambda \in [\,0,1\,]$ ist
$$\begin{aligned}
\lambda x + (1-\lambda)\xi &> \frac{1}{\sqrt{12}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{12}}(1-\lambda) \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}} \\
\lambda y + (1-\lambda)\eta &> \frac{1}{\sqrt{12}}\lambda + \frac{1}{\sqrt{12}}(1-\lambda) \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}
\end{aligned}$$
also $\lambda X + (1-\lambda)\Xi \in K$.
Weiterhin ist
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x^3 + y \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x + 4y^3 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 12x^2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 12y^2
\end{aligned}$$
und damit
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

d.h. $H_f(x,y)$ ist genau dann positiv definit, wenn

$$12x^2 > 0 \text{ und } 144x^2y^2 - 1 > 0$$

auf K ist dies erfüllt, denn für $(x,y) \in K$ ist

$$\begin{aligned} 12x^2 &> 12 \cdot \frac{1}{12} \\ &= 1 \\ 144x^2y^2 - 1 &> 144 \cdot \frac{1}{12^2} - 1 \\ &> 0. \end{aligned}$$

also ist $f|_K$ konvex.

Zu Abschnitt 8.5

8.5.1 Beweisen Sie, dass Summen und Vielfache differenzierbarer Abbildungen differenzierbar sind.
Sei also $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in U$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned} (f + \lambda g)(x_0 + h) &= f(x_0 + h) + \lambda g(x_0 + h) \\ &= f(x_0) + J_f(x_0)h + o(\|h\|) + \lambda g(x_0) + \lambda J_g(x_0)h + \lambda o(\|h\|) \\ &= (f + \lambda g)(x_0) + \big(J_f(x_0) + \lambda J_g(x_0)\big)h + o(\|h\|) \end{aligned}$$

für $h \to 0$.
Also ist $f + \lambda g$ in x_0 differenzierbar mit

$$J_{f+\lambda g}(x_0) = J_f(x_0) + \lambda J_g(x_0)$$

Für die Spezialfälle $\lambda = 1$ resp. $f = 0$ folgt die Behauptung über Summen und Vielfache.

8.5.2 Finden Sie für die folgenden Matrizen A die bestmögliche Konstante L, so dass $\|Ah\| \leq L\|h\|$ für alle h gilt:

$$A = (\pi), \ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist die bestmögliche Konstante sicher durch

$$L = \sup_{h \neq 0} \frac{\|Ah\|_2}{\|h\|_2}$$

gegeben.

- Für $A = (\pi)$ ist

$$\begin{aligned} L &= \sup_{h \neq 0} \frac{|\pi h|}{|h|} \\ &= \sup_{h \neq 0} \pi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

- Hier ist mit $h_0 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} 15 &= \|(0,15)\|_2 \\ &= \|Ah_0\|_2 \\ &= \frac{\|Ah_0\|_2}{\|h_0\|_2} \\ &\leq \sup_{h \neq 0} \frac{\|Ah\|_2}{\|h\|_2} = L \\ &= \sup_{h \neq 0} \frac{\sqrt{h_1^2 + 255h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &\leq \sup_{h \neq 0} \frac{\sqrt{255h_1^2 + 255h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= 15. \end{aligned}$$

  also $L = 15$.

- Hier ist mit $h_0 = (1, 2-\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ zunächst

$$\|h_0\|_2 = \sqrt{1+4-4\sqrt{2}+2} = \sqrt{7-4\sqrt{2}}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{17-10\sqrt{2}}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}} &= \frac{1}{\|h_0\|_2}\left\|\left(3-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right)\right\|_2 \\
&= \frac{\|Ah_0\|_2}{\|h_0\|_2} \\
&\leq \sup_{h\neq 0} \frac{\|Ah\|_2}{\|h\|_2} = L \\
&= \sup_{h\neq 0} \frac{\sqrt{(h_1+h_2)^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&\leq \sup_{h\neq 0} \frac{\sqrt{17-10\sqrt{2}}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{17-10\sqrt{2}}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}.
\end{aligned}$$

also $L = \frac{\sqrt{17-10\sqrt{2}}}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}$.

8.5.3 Berechnen Sie die Jacobimatrix für die durch

$$(x_1, \ldots, x_n) := (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, \|x\|^2)$$

von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^{n+1}$ definierte Funktion.
Es ist für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
J_f(x) &= \begin{pmatrix} \partial x_n/\partial x_1 & \cdots & \partial x_1/\partial x_1 & \partial/\partial x_1 \|x\|_2^2 \\ & \vdots & & \vdots \\ \partial x_n/\partial x_n & \cdots & \partial x_1/\partial x_n & \partial/\partial x_n \|x\|_2^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 2x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 1 & & 0 & 2x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

8.5.4 Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.

(a) Man definiere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(t) := f(tx)$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ vorgegeben ist. Berechnen Sie $g'(t)$.

(b) Man zeige: Gilt

$$\langle (\text{grad } f)(x), x \rangle = 0$$

für alle x, so ist f konstant.

1. Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}
g'(t) &= f'(tx) \cdot \frac{d}{dt} tx \\
&= \langle (\text{grad } f)(tx), x \rangle
\end{aligned}$$

2. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und g wie in a), nach Voraussetzung folgt $g' = 0$, also die Konstanz von g, insbesondere ist

$$f(0) = g(0) = g(1) = f(x)$$

da $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig war, folgt $f \equiv f(0)$, d.h. f ist konstant.

8.5.5 Es sei $f(x, y) = (x + y, x^3, 2 + xy^2)$. Finden Sie eine Näherungsformel für f in der Nähe von $(2, 2)$.
Zunächst ist:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 & 0 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

und damit

$$f(2, 2) = (4, 8, 10), \quad J_f(2, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| \ll 1$, dass

$$\begin{aligned} f(2 + h_1, 2 + h_2) &\approx (4, 8, 10)^{\perp} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} h \\ &= (4 + h_1 + h_2, 8 + 12h_1, 10 + 4h_1 + 8^2_h)^{\perp}. \end{aligned}$$

8.5.6 In einem Strömungskanal sei die Windgeschwindigkeit bei (x, y, z) durch $(y, x, 2)$ gegeben. Ein Teilchen bewegt sich so, dass es zur Zeit t bei $(1, t, t)$ ist. Berechnen Sie mit der Kettenregel die Veränderung der Windgeschwindigkeit aus der Sicht des Teilchens. Wie müsste die Bahn des Teilchens sein, dass es Windstille empfindet?
Es sei $k(t) = (1, t, t)$ der Ort des Teilchens zur Zeit t und $w(t)$ die Windgeschwindigkeit in $k(t)$ zur Zeit t, d.h. $k = f \circ k$, also ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} w'(t) &= J_f\big(k(t)\big)k'(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Windgeschwindigkeitsänderung aus der Sicht des Teilchens.
Das Teilchen empfindet Windstille, wenn $k'(t) = (f \circ k)(t)$ für alle Zeiten t gilt (wobei wieder $k = (k_1, k_2, k_3)^{\perp}$ der Ort des Teilchens sei), d.h. wenn sich das Teilchen zu jeder Zeit in Richtung des Windes bewegt, wir erhalten das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} k_1'(t) &= k_2(t) \\ k_2'(t) &= k_1(t) \\ k_3'(t) &= 2 \\ k(0) &= (1, 0, 0)^{\perp} \end{aligned}$$

unter der Annahme, dass das Teilchen im selben Ort starten soll.
Sofort folgt $k_3(t) = 2t$ für alle t, setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so folgt $k_2'' = k_2$, also

$$k_2(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-t}$$

für gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Nun folgt aus der zweiten Gleichung, dass

$$k_1(t) = k_2'(t) = \alpha \mathrm{e}^t - \beta \mathrm{e}^{-t}$$

und damit aus der Anfangsbedinung, dass

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 1 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{aligned}$$

also $\alpha = -\beta = 1/2$.
Das Teilchen muss sich also von $(1, 0, 0)$ aus entlang des Weges $k(t) = 1/2(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}, 4t)^{\perp}$ bewegen.

Zu Abschnitt 8.6

8.6.1 Wo ist die Jacobideterminante von $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^3, x^2 + y^2 + z)$ von Null verschieden?
Es bezeichne f die Abbildung $f : (x, y, z) \mapsto (x^2, y^3, x^2 + y^2 + z)$, dann ist

$$\begin{aligned} \det J_f(x,y,z) &= \det \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 3y^2 & 0 \\ 2x & 2y & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2x \cdot 3y^2 \cdot 1 \\ &= 6xy^2 \end{aligned}$$

Also ist $\det J_f(x, y, z) \neq 0$, d.g.w. $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

8.6.2 Berechnen Sie für $(x, y) \mapsto (x, -y^2)$ die Jacobimatrix der inversen Abbildung bei $(1, 1)$.

8.6.3 Man zeige, dass jede stetige lokal injektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv ist. Gilt das auch für beliebige Abbildungen?
Sei also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lokal injektiv und stetig. Angenommen f wäre nicht injektiv, dann existierten $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$, es sei $\xi_0 \in \,]\,x, y\,[$ (das Intervall kann offen gewählt werden, da $f(x) = f(y)$ ist, und somit ein Maximum entweder überall oder im Inneren angenommen wird) mit

$$f(\xi) \leq f(\xi_0), \quad \text{für alle } x \leq \xi \leq y$$

Da f lokal injektiv ist, existierte eine Umgebung U von ξ, so dass $f|_U$ injektiv ist, ohne Einschränkung sei $U \subset \,]\,x, y\,[$. Es sei $\varepsilon > 0$ so, dass $[\,\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon\,] \subset U$, weiter gelte ohne Einschränkung[1] $f(\xi - \varepsilon) < f(\xi + \varepsilon)$. Also gälte

$$f(\xi - \varepsilon) < f(\xi + \varepsilon) \leq f(\xi)$$

Wegen der Stetigkeit von f existierte ein $\eta \in [\,\xi - \varepsilon, \xi\,]$ mit $f(\eta) = f(\xi + \varepsilon)$ was wegen $\eta, \xi + \varepsilon \in U$ der Injektivität von $f|_U$ widerspräche.
Also ist f injektiv.
Ohne die Voraussetzung der Stetigkeit ist das falsch. Betrachte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$ für $x > 0$ und $f(x) = 1 + x$ für $x \leq 0$. Dann ist f lokal injektiv: In allen $x \neq 0$ ist f als in einer Umgebung differenzierbare Funktion mit Ableitung 1 nach dem Satz über die inverse Abblidung lokal injektiv. Für $x = 0$ betrachte $U := \,]-1/2, 1/2\,[$. Es seien $y, z \in U$ mit $f(y) = f(z)$ und (o.E) $y < z$, sind $y, z \leq 0$, so folgt $1 + y = 1 + z$, also $y = z$, analog für $y, z > 0$. Bleibt also der Fall $y \leq 0$ und $z > 0$. Dann ist

$$f(z) = z < \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - y = f(y)$$

was $f(y) = f(z)$ widerspricht. Also tritt dieser Fall nicht ein und f ist in 0 lokal injektiv.

8.6.4 Definieren Sie lokal bei $1 \in \mathbb{C}$ eine komplexe Quadratwurzel: Es soll also $w : U \to \mathbb{C}$ auf einer Umgebung U von 1 so definiert werden, dass w – aufgefasst als Funktion einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ – differenzierbar ist und dass $\big(w(z)\big)^2 = z$ für alle $z \in U$ gilt.
Setze $U := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$, dann ist U offen. Definiere für $z = x + iy) \in U$:

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y)) := \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}}$$

dann ist $(u, v) : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^2$ als Komposition differenzierbarer Abbildungen differenzierbar und für $z = x + iy \in U$ ist (beachte $y > 0$):

$$\begin{aligned} w^2(z) &= u^2(x,y) - v^2(x,y) + 2i \cdot u(x,y)v(x,y) \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x - \sqrt{x^2 + y^2} + x}{2} + 2i \cdot \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x^2}{4}} \\ &= \frac{2x}{2} + i\sqrt{y^2} \\ &\overset{y \geq 0}{=} x + iy \\ &= z \end{aligned}$$

[1] sonst betrachte $-f$

Eine solche Funktion war aber anzugeben.

8.6.5 Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $f(x,y,z) := (x, y, x^2 + \sin y + xyz)$ definiert. Für welche offenen Teilmengen $O \subset \mathbb{R}^3$ kann man aufgrund des Satzes von der offenen Abbildung garantieren, dass $f(O)$ offen ist?

Es sei $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \det J_f(x,y,z) \neq 0\}$, für alle offenen $O \subset \Omega$ kann garantiert werden, dass $f(O)$ offen ist. Es bleibt Ω zu bestimmen, man hat zunächst

$$\begin{aligned}
\det J_f(x,y,z) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x+yz & \cos y + xz & xy \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot xy \\
&= xy
\end{aligned}$$

Also ist $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$.

Zu Abschnitt 8.7

8.7.1 Es seien $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ für $i = 1, \ldots, m$. Durch diese „Punktwolke“ soll eine Gerade $x \mapsto ax + b$ gelegt werden, die die Punktwolke möglichst gut approximiert. Das soll bedeuten, dass die Summe der quadrierten Abstände, also $\sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2$, so klein wie möglich ist.

Finden Sie Formeln für diejenigen a und b, die diese Extremwertaufgabe lösen.

Es ist also $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2$ zu minimieren, zunächst ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) &= \sum_{i=1}^m 2x_i \cdot (ax_i + b - y_i) \\
\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) &= \sum_{i=1}^m 2(ax_i + b - y_i)
\end{aligned}$$

Notwendig für ein Minimum ist $(\operatorname{grad} f)(a,b) = 0$, es gilt, wobei zunächst angenommen wird, dass $\sum_{i=1}^m x_i^2 > 0$:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{grad} f)(a,b) &= 0 \\
\iff 2a \sum_{i=1}^m x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^m x_i &= 2 \sum_{i=1}^m x_i y_i \\
\wedge 2a \sum_{i=1}^m x_i + m \cdot b &= 2 \sum_{i=1}^m y_i \\
\iff a &= \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i - b \sum_{i=1}^m x_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \\
\wedge 2a \sum_{i=1}^m x_i + m \cdot b &= 2 \sum_{i=1}^m y_i \\
\iff a &= \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i - b \sum_{i=1}^m x_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \\
\wedge -2b \frac{\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^m x_i^2} + m \cdot b &= 2 \sum_{i=1}^m y_i - 2 \frac{\sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \\
\iff a &= \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i - b \sum_{i=1}^m x_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \\
\wedge b \cdot \frac{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^m x_i^2} &= 2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^m y_i \cdot \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i \cdot \sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2}
\end{aligned}$$

Für den Fall, dass $m\sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2 \neq 0$, ist das gleichwertig zu

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^m x_iy_i - b\sum_{i=1}^m x_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} \\ \wedge b &= 2\cdot\frac{\sum_{i=1}^m y_i\cdot\sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i\cdot\sum_{i=1}^m x_iy_i}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2} \\ \Longleftrightarrow a &= \frac{\sum_{i=1}^m x_iy_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2} - \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2}\cdot 2\cdot\frac{\sum_{i=1}^m y_i\cdot\sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i\cdot\sum_{i=1}^m x_iy_i}{m\sum_{i=1}^m x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2} \end{aligned}$$

Ist dagegen $m\sum_{i=1}^m x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^2 = 0$, so existiert im Falle

$$\sum_{i=1}^m y_i\cdot\sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=1}^m x_i\cdot\sum_{i=1}^m x_iy_i \neq 0$$

keine Lösung, anderenfalls kann $b\in\mathbb{R}$ beliebig gewählt werden, und a ergibt sich gemäß

$$a = \frac{\sum_{i=1}^m x_iy_i - b\sum_{i=1}^m x_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2}$$

Ist schließlich $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 0$, so folgt $x_i = 0$ für alle i und das ursprüngliche Gleichungssystem lautet jetzt

$$0 = 0 \wedge mb = 2\sum_{i=1}^m y_i$$

eine Lösung ist also durch $b = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m y_i$, $a\in\mathbb{R}$ beliebig gegeben.
Das tatsächlich ein lokales Minimum vorliegt, ergibt sich aus der Geometrie der Abbildung, da

$$H_f(a,b) = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} 2x_i^2 & 2x_i \\ 2x_i & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $a,b\in\mathbb{R}$ negativ semidefinit ist.

8.7.2 Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wir wählen auf der x- bzw. y-Achse neue Koordinaten durch Übergang zu $2x$ bzw. y^2; in den neuen Koordinaten hat f also die Form $F(u) = \left(f(2u)\right)^2$. Drücken Sie die Ableitung von F durch die von f aus und finden Sie ein Beispiel, in dem F' eine einfachere Form hat als f'.
Es ergibt sich nach der Kettenregel, dass

$$\begin{aligned} F'(u) &= 2f(2u)\cdot f'(2u)\cdot 2 \\ &= 4f(u)f'(u) \end{aligned}$$

für $f(x) = \sqrt{2+\frac{1}{2}\sin t}$ ist

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+\frac{1}{2}\sin t}}\cdot\frac{1}{2}\cos t = \frac{\cos t}{4\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin t}},$$

also

$$F'(u) = 4f(u)f'(u) = \cos t$$

also F' „einfacher“ als f'.

8.7.3 Für ein fest vorgegebenes $R>0$ sei ein Quader Q durch

$$Q := [\,0,R\,]\times[\,0,2\pi\,]\times[\,0,2\pi\,]$$

definiert. Für $(r,\varphi,\psi)\in Q$ definiere

$$T(r,\varphi,\psi) := \big((R+r\cos\psi)\cos\varphi, (R+r\cos\psi)\sin\varphi, r\sin\psi\big),$$

diese Abbildung beschreibt die Parametrisierung durch *Toruskoordinaten*.

(a) Was für eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben, wenn zwei der Variablen fest gelassen werden? Was ist zum Beispiel die Menge der $T(r,\varphi,\psi)$ für ein festes $r \in [\,0,R\,]$, wenn φ,ψ alle Werte in $[\,0,2\pi\,]$ durchlaufen?

(b) Wie sieht die Bildmenge von T aus?

(c) Zeigen Sie, dass T auf dem Innern von Q differenzierbar ist und dass die Jacobideterminante dort nirgendwo verschwindet.

1.
   - Sei zunächst $r \in [\,0,R\,]$ fest. Dann ist die Menge der $T(r,\varphi,\psi)$ die Oberfläche eines Torus[2)], denn: Hält man auch noch φ fest, so ist die Menge $T(r,\varphi,\psi)$ ein Kreis um $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$ mit dem Radius r und für festes ψ ein Kreis mit dem Radius $R + r\cos\psi$ um $(0,0,r\sin\psi)$.
   - Hält man $\varphi \in [0,2\pi]$ fest, und zusätzlich r, so erhält man wieder einen Kreis um $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$ mit Radius r, hält man ψ zusätzlich fest, so ergibt sich eine Strecke von $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$ in Richtung $(\cos\psi\cos\varphi, \cos\psi\sin\varphi, \sin\psi)$, insgesamt ergibt sich also für festes φ der Vollkreis um $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$ mit Radius R.
   - Hält man $\psi \in [0,2\pi]$ fest, so ergibt sich bei zusätzlich festgehaltenem r wieder ein Kreis mit Radius $R + r\cos\psi$ um $(0,0,r\sin\psi)$, für zusätzlich festgehaltes φ die Strecke, also insgesamt ein Teil eines Kegel–/Zylindermantel, den man erhält, wenn man die Strecke um die z–Achse rotiert.
2. Das Bild von T erhält man leicht unter mit Hilfe der Überlegungen aus a). Es ist der entartete Torus, für den beide Radien R sind.
3. T ist differenzierbar als Komposition differenzierbarer Abbildungen, man erhält

$$\begin{aligned}
\det J_T(r,\varphi,\psi) &= \det\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi \\ -(R + r\cos\psi)\sin\varphi & (R + r\cos\psi)\cos\varphi & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix} \\
&= (R + r\cos\psi)\sin\varphi \det\begin{pmatrix} \cos\psi\sin\varphi & \sin\psi \\ -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix} \\
&\quad + (R + r\cos\psi)\cos\varphi \det\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi \\ -r\cos\varphi\sin\psi & r\cos\psi \end{pmatrix} \\
&= (R + r\cos\psi) r\sin^2\varphi\cos^2\psi + (R + r\cos\psi) r\sin^2\varphi\sin^2\psi \\
&\quad + (R + r\cos\psi) r\cos\varphi^2\cos^2\psi + (R + r\cos\psi) r\cos\varphi^2\sin^2\psi \\
&= (R + r\cos\psi) r(\sin^2 + \cos\psi)(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\
&= (R + r\cos\psi) r
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist auf dem Innreren von Q positiv, da dort $r > 0$ und

$$(R + r\cos\psi) \geq R - r > 0$$

gelten.

Zu Abschnitt 8.8

8.8.1 Interpretieren Sie die so genannte $p{-}q$-Formel für quadratische Gleichungen aus der Schulmathematik mit dem Satz über implizite Funktionen: Wann kann man Lösungen x der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ als Funktion von p und q darstellen? (S.a. Aufgabe 8.2.6.)
Es ist also zu untersuchen, wo $f(p,q,x) = 0$ mit $f(p,q,x) = x^2 + px + q$ lokal nach x auflösbar ist, hinreichend dafür ist $\partial f/\partial x(p,q,x) \neq 0$, d.h.

$$2x + p \neq 0 \iff p \neq -2x \iff x \neq -\frac{p}{2},$$

das sind aber genau die Punkte (p,q,x) wo (p–q–Formel!) x doppelte Nullstelle von $x^2 + px + q$ ist, anderenfalls ist x lokal implizit definiert.

[2)] Ein Torus sieht im wesentlichen aus wie ein Doughnut, und Topologen können ihn nicht von Kaffeetassen unterscheiden.

8.8.2 Zeigen Sie, dass die Bedingung aus dem Satz über implizite Funktionen nur eine *hinreichende* Bedingung ist: Auch wenn $\partial f/\partial y$ gleich Null ist, kann y implizit definiert sein.

Betrachte $f(x,y) = x - y^3$. Dann ist $\partial f/\partial y(x,y) = -3y^2$, also $\partial f/\partial y(0,0) = 0$. Dennoch ist y durch $f(x,y) = 0$ implizit definiert, da mit $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{sgn} x \sqrt[3]{|x|}$ gilt, dass für $x \in \mathbb{R}$:

$$f\big(x, \psi(x)\big) = x - (\operatorname{sgn} x)^3 |x| = x - \operatorname{sgn} x |x| = 0.$$

8.8.3 Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind y_1, y_2 durch die Gleichungen

$$x + ay_1 + 2y_2 = 0, \; x - y_1 - ay_2 = 0$$

bei $(0,0,0)$ als Funktion von x darstellbar? Wenden Sie zunächst Satz **??** an, die Funktionen sollen dann auch explizit angegeben werden.

Schreibe zunächst für festes $a \in \mathbb{R}$ und beliebige $y \in \mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x,y) := \big(x + ay_1 + 2y_2, x - y_1 - ay_2\big)^\perp = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \cdot y.$$

Zu untersuchen ist also, für welche a die Gleichung $f_a(x,y) = 0$ den Vektor y implizit definiert, d.h. $\det \partial[y] f_a(0,0) \neq 0$ gilt.

Es ist zunächst

$$\partial[y] f_a(0,0) = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix},$$

wie man aus obiger Darstellung erhält, weiter ist

$$\begin{aligned} \det \partial[y] f_a(0,0) &= \det \begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \\ &= -a^2 + 2 \\ &= 0 \\ \iff a^2 &= 2 \\ \iff a &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Für alle $a \neq \pm\sqrt{2}$ ist also y durch $f_a(x,y) = 0$ in $(0,0)$ implizit definiert.

Ist dies der Fall, so gilt dann

$$\begin{aligned} y &= -\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & -a \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2-a^2} \begin{pmatrix} -a & -2 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2-a^2} \begin{pmatrix} -(a+2)x \\ (a+1)x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist y explizit dargestellt.

Zu Abschnitt 8.9

8.9.1 Behandeln Sie die Probleme aus Aufgabe 8.4.3 noch einmal unter Verwendung von Lagrange-Multiplikatoren.

Wie in Aufgabe 8.4.3 sei a die Seitenlänge des Grunddreicks, h die Höhe der Säule, G den Flächeninhalt des Grunddreiecks, O die Oberfläche, V das Volumen und L die Gesamtkantenlänge der Säule, dann gilt zunächst:

$$\begin{aligned} G &\overset{\text{Heronsche Formel}}{=} \sqrt{\frac{3}{2}a \cdot \frac{1}{8}a^3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \\ V &= G \cdot h \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 h \\ O &= 2G + 3ah \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3ah \\ L &= 6a + 3h. \end{aligned}$$

Weiterhin sei $\alpha := \frac{\sqrt{3}}{4}$.
Wir erhalten also für die beiden zu lösenden Probleme:

- Zu maximieren ist $V(a,h) = \alpha a^2 h$ unter der Nebenbedingung $N_1(a,h) = \alpha a^2 + 3ah - O = 0$. Zu lösen ist also das Gleichungssystem

  $$(\operatorname{grad} V)(a,h) = (2\alpha a h, \alpha a^2) = \lambda(2a\alpha + 3h, 3a) = \lambda(\operatorname{grad} N_1)(a,h), N_1(a,h) = 0$$

  d.h.
  $$2\alpha a h = 2a\lambda\alpha + 3\lambda h, \alpha a^2 = 3\lambda a, \alpha a^2 + 3ah - O = 0$$
  Aus Gleichung zwei folgt sofort, dass $a = 3\lambda\alpha^{-1}$, setzt man das in die anderen Gleichungen ein, so folgt

  $$6\lambda h = 6\lambda^2 + 3\lambda h, \alpha 6\lambda^2 + 9\lambda\alpha^{-1}h - O = 0$$

  aus der ersten Gleichung folgt nun ($\lambda \neq 0$, denn $\lambda = 0$ impliziert $a = 0$, was sinnlos ist), dass $h = 2\lambda$, setzt man das in die zweite Gleichung ein, so folgt

  $$\alpha 6\lambda^2 + 18\lambda^2\alpha^{-1} - O = 0$$

  und damit

  $$\begin{aligned} \lambda &= \pm\sqrt{O} \cdot \frac{1}{\sqrt{6\alpha + 18\alpha^{-1}}} \\ &= \pm\sqrt{O} \cdot \frac{1}{\sqrt{6 \cdot 3^{1/2} \cdot 2^{-2} + 18 \cdot 3^{-1/2} \cdot 2^2}} \\ &= \pm\sqrt{O} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^{3/2}2^{-1} + 3^{3/2}2^3}} \\ &= \pm\sqrt{O} \cdot \frac{1}{3^{3/4}\sqrt{2^{-1} + 2^3}} \\ &= \pm\sqrt{O} \cdot \frac{1}{3^{3/4} \cdot 2\sqrt{2 + 32}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{O}}{2} \cdot 3^{-3/4} \cdot 34^{-1/2} \end{aligned}$$

  Also ist
  $$h = \sqrt{O} \cdot 3^{-3/4} \cdot 34^{-1/2}$$

  und damit

  $$\begin{aligned} a &= 3\frac{\sqrt{O}}{2} \cdot 3^{-3/4} \cdot 34^{-1/2} \cdot 2^2 \cdot 3^{-1/2} \\ &= 2\sqrt{O} \cdot 3^{-1/4} \cdot 34^{-1/2} \end{aligned}$$

- Zu minimieren ist $L(a,h) = 6a + 3h$ unter $N_2(a,h) = \alpha a^2 h - V = 0$. Man erhält das Gleichungssystem
  $$6 = 2\lambda\alpha a h, 3 = \lambda\alpha a^2, \alpha a^2 h - V = 0$$

Aus der zweiten Gleichung folgt, dass $\lambda \neq 0$ und $a^2 = 3\lambda^{-1}\alpha^{-1}$, also (da nur $a > 0$ interessant ist, dass $a = 3^{1/2}\lambda^{-1/2}\alpha^{-1/2}$, also

$$3^{1/2} = \lambda^{1/2}\alpha^{1/2}h, 3\lambda^{-1}h - V = 0,$$

aus der ersten Gleichung folgt nun $h = 3^{1/2}\lambda^{-1/2}\alpha^{-1/2} = a$, und damit

$$a^3 = V\alpha^{-1} \iff a = \sqrt[3]{V} \cdot \alpha^{-1/3} = \sqrt[3]{V} \cdot 3^{-1/6}2^{2/3}$$

also

$$a = h = \sqrt[3]{V} \cdot 3^{-1/6}2^{2/3}.$$

8.9.2 Wo ist die L^1-Norm auf der euklidischen Kugeloberfläche am größten? (Gesucht ist also ein $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, so dass $x_1 + \cdots + x_n$ maximal wird.)
Zu minimieren ist also $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ unter $N(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0$, zu lösen ist also das Gleichungssystem

$$(\operatorname{grad} f)(x) = (1, \ldots, 1) = 2\lambda \cdot x = \lambda(\operatorname{grad} N)(x), N(x) = 0$$

Aus Gleichung eins, folgt, dass $x_i = \frac{1}{2\lambda}$ für alle i, und durch Einsetzen folgt also

$$0 = N(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\lambda^2} - 1 \iff \lambda^2 = \frac{1}{4n} \iff \lambda = \pm\frac{\sqrt{n}}{2}$$

d.h. es ist $x_i = \pm n^{-1/2}$ (selbes Vorzeichen für alle n). Nun ist

$$f(n^{1/2}, \ldots, n^{1/2}) = n^{3/2} > -n^{3/2} = f(-n^{1/2}, \ldots, -n^{1/2}),$$

das Maximum wird also für $x = (n^{1/2})_{1 \leq i \leq n}$ angenommen.
8.9.3 Welches Gleichungssystem ist zu lösen, um das Maximum von $(x, y, z) \mapsto x$ auf der Menge

$$\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x^2 - y^2 - z^2 = 2\}$$

zu finden?
Es sei $f(x, y, z) = x$, $N_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ und $N_2(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$.
Zu maxmieren ist f unter $N_1(x, y, z) = N_2(x, y, z) = 0$. Man hat also nach der Lagrange Methode das Gleichungssystem

$$(\operatorname{grad} f)(x, y, z) = \lambda_1(\operatorname{grad} N_1)(x, y, z) + \lambda_2(\operatorname{grad} N_2)(x, y, z) = 0, N_1(x, y, z) = N_2(x, y, z) = 0$$

zu lösen, also

$$\begin{aligned} 1 &= 2x\lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ 0 &= 2y\lambda_1 - 2y\lambda_2 \\ 0 &= 2z\lambda_1 - 2z\lambda_2 \\ 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ 0 &= x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$