Zu Abschnitt 7.1

7.1.1 Man folgere aus dem Approximationssatz von Weierstraß, dass die Polynome mit rationalen Koeffizienten in $C[a,b]$ dicht liegen. Weiter soll gezeigt werden, dass die Menge dieser Polynome abzählbar ist.
Insgesamt heißt das: $C[a,b]$ ist separabel.
Sei also $f \in CIab$ und $\varepsilon > 0$. Wähle nach dem Approximationssatz von Weierstraß ein Polynom $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f-p\|_\infty < \varepsilon/2$. Als Polynom ist p von der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mit einem $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ für $1 \le i \le n$. Zu jedem $1 \le i \le n$ wähle nun ein $q_i \in \mathbb{Q}$, so dass

$$|a_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)\max\{|a|,|b|\}^i}$$

Definiere $q : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$q(x) := \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$$

dann ist q ein Polynom mit rationalen Koeffizienten und für $x \in [a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f(x) - q(x)| &\le |f(x) - p(x)| + |p(x) - q(x)| \\
&\le \|f-p\|_\infty + \left|\sum_{i=0}^{n} (a_i - q_i) x^i\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^{n} |a_i - q_i||x|^i \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)\max\{|a|,|b|\}^i} \max\{|a|,|b|\}^i \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es folgt $\|f-q\|_\infty < \varepsilon$ und damit der erste Teil der Behauptung.
Zur Abzählbarkeit der Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten: Man zeigt zunächst, dass $\mathbb{Q}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ abzählbar ist. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar, sei also $n > 1$ und bereits gezeigt, dass $\mathbb{Q}^{n-1}$ abzählbar ist. Es seien nun $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ und $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^{n-1}$ bijektiv und weiter sei $\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv (dass $\mathbb{N}^2$ abzählbar ist, sieht man wie die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ mit dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren), und seien $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Projektionen auf die erste und zweite Komponente.
Betrachte nun die Abbildung:

$$\beta \mathbb{N} \ni n \mapsto \big((\tau \circ \rho_1)(n), (\sigma \circ \rho_2)(n)\big) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^{n-1} = \mathbb{Q}^n$$

β ist bijektiv als Komposition bijektiver Abbildungen, also in $\mathbb{Q}^n$ abzhählbar.
Es sei nun $\mathbb{Q}[x]^{\le n}$ die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten vom Grad höchstens n, durch

$$(q_i)_{0 \le i \le n} \mapsto \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$$

ist eine Bijektion $\alpha : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}[x]^{\le n}$ definiert, also ist $\mathbb{Q}[x]^{\le n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.
Damit ist aber auch $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[x]^{\le n}$ als Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar.
Also ist $C[a,b]$ separabel, was zu zeigen war.

7.1.2 Sei $X \subset C[1,2]$ die Menge derjenigen Polynome, für die alle Exponenten durch 5 teilbar sind; z.B. liegen $3x^5 - 10.2x^{100}$ und $2x^{100005}$ in X, das Polynom $x^5 - 2x$ aber nicht. Zeigen Sie, dass X in der Supremumsnorm dicht in $C[1,2]$ liegt.
In dieser Aufgabe bezeichne $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ die Supremumsnorm auf dem Intervall $[a,b]$.

Es sei also $f \in C[1,2]$, $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung und $\varepsilon > 0$, wähle zunächst nach dem Approximationssatz von Weierstraß ein Polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ mit $\|f - p\|_{C[0,3]} < \varepsilon/2$, weiterhin wähle wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $\delta \leq 1$ und $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ für $x, y \in [a,b]$ mit $|x - y| \leq \delta$.
Nach dem Approximationssatz von Weierstraß existiert weiterhin ein Polynom $q(x) = \sum_{i=0}^{m} q_i x^i$, so dass $\left\|q - \sqrt[5]{\cdot}\right\|_{C[1,32]} \leq \delta$. Definiere nun $s : [1,2] \to \mathbb{R}$ durch $s(x) := (p \circ q)(x^5)$, dann gilt für $x \in [1,2]$ zunächst

$$\begin{aligned} s(x) &= (p \circ q)(x^5) \\ &= p\left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^{5j}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} p_i \left(\sum_{j=0}^{m} q_j x^{5j}\right)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} p_i \sum_{\substack{0 \leq k_1, \ldots, k_m \leq i \\ k_1 + \cdots + k_m = i}} \frac{i!}{\prod_{j=0}^{m} k_j!} \prod_{j=0}^{m} q_j^{k_j} x^{5jk_j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{0 \leq k_1, \ldots, k_m \leq i \\ k_1 + \cdots + k_m = i}} \left(p_i \frac{i!}{\prod_{j=0}^{m} k_j!} \prod_{j=0}^{m} q_j^{k_j}\right) x^{5ij} \end{aligned}$$

Also ist s ein Polynom, dessen Koeffizieten alle in $5\mathbb{Z}$ liegen, weiterhin gilt aber für $x \in [1,2]$:

$$\begin{aligned} \left|q(x^5) - x\right| &= \left|q(x^5) - \sqrt[5]{x^5}\right| \\ &\leq \left\|q - \sqrt[5]{\cdot}\right\|_{C[1,32]} \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

damit folgt nach Wahl von δ, dass $p(x^5) \in [0,3]$ und damit:

$$\begin{aligned} |s(x) - f(x)| &= \left|q\big(p(x^5)\big) - f\big(p(x^5)\big)\right| + \left|f\big(p(x^5)\big) - f(x)\right| \\ &\leq \|f - q\|_{C[0,3]} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

7.1.3 Sei $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ eine stetige Funktion mit $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = 1$; es soll $\varphi(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ sein.
Man definiere $f_n(x) := n\varphi(nx)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (f_n) eine Diracfolge.
Zunächst ist für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} n\varphi(nx)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} n\varphi\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) d\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} n\varphi(x) \cdot \frac{1}{n}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

Desweiteren sind die f_n stetig und nichtnegativ, da φ stetig und nichtnegativ ist.
Seien nun $\varepsilon, \delta > 0$, wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$ für $n \geq n_0$, dann ist für diese n:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\infty} f_n(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\delta} f_n(x)\,dx &\overset{\text{wie oben}}{=} \int_{n\delta}^{\infty} \varphi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-n\delta} \varphi(x)\,dx \\ &\overset{1 < n\delta,\ \varphi(x) = 0 \text{ für } |x| \geq 1}{=} \int_{n\delta}^{\infty} 0\,dx + \int_{-\infty}^{-n\delta} 0\,dx \\ &= 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f_n eine Diracfolge, q.e.d.

Zu Abschnitt 7.2

7.2.1 Zeigen Sie für eine stetig differenzierbare Funktion, dass aus $f'(x) > 0$ (alle x) die strenge Monotonie folgt, und zwar einmal mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung und dann unter Verwendung der Gleichung (7.1) aus Abschnitt 7.2.
Sei also $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine C^1–Funktion mit $f'(x) > 0$ für $x \in I$. Seien weiter $x, y \in I$ mit $x < y$.

- (mit Hilfe des Mittelwertsatzes) Nach dem Mittelwertsatz exisitert $\xi \in\ ]\,x, y\,[$, so dass
$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$$
Nun ist $y - x > 0$ und $f'(\xi) > 0$, also
$$f(x) < f(x) + f'(\xi)(y - x) = f(y),$$
was die strenge Monotonie zeigt.
- (mit Gleichung 7.1) Für $\xi \in [\,x, y\,]$ gilt nach (7.1):
$$f(\xi) = f(x) + \int_x^\xi f'(t)\,dt$$
Auf der Kompakten Menge $[\,x, y\,]$ nimmt f' als stetige Funktion sein Minimum an, es sei $\eta := \inf_{x \le t \le y} f'(t) > 0$.
Damit folgt
$$\begin{aligned} f(x) &< f(x) + \eta(y - x) \\ &= f(x) + \int_x^y \eta\,dt \\ &\le f(x) + \int_x^y f'(t)\,dt \\ &= f(y), \end{aligned}$$
also erneut die strenge Monotonie von f.

7.2.2 Sei $f :]\,a, b\,[\to \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f stetig. Muss f auch eine Lipschitzabbildung sein?
Wir zeigen sogar etwas mehr, nämlich das f in jedem Punkt links– und rechtsseitig differenzierbar ist, dazu zeigen wir zunächst, dass für $x \in\ ]\,a, b\,[$ und $h < k$ mit $x + h, x + k \in\ ]\,a, b\,[$ stets
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \le \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$$
gilt. Dazu unterscheidet man drei Fälle:

- Es ist $0 < h < k$, dann gilt $0 \le (k - h)/k,\ h/k \le 1$ und damit wegen der Konvexität von f:
$$\begin{aligned} f(x+h) &= f\left(\frac{k-h}{k}x + \frac{h}{k}(x+k)\right) \\ &\le \frac{k-h}{k}f(x) + \frac{h}{k}f(x+k) \\ \iff kf(x+h) &\le (k-h)f(x) + hf(x+k) \\ \iff k\big(f(x+h) - f(x)\big) &\le h\big(f(x+k) - f(x)\big) \\ \iff \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &\le \frac{f(x+k) - f(x)}{k} \end{aligned}$$

- Es ist $h < 0 < k$, dann gilt $0 \leq k/(k-h), -h/(k-h) \leq 1$ und so

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & f\left(\dfrac{k}{k-h}(x+h) - \dfrac{h}{k-h}(x+k)\right) \\ & \leq & \dfrac{k}{k-h}f(x+h) - \dfrac{h}{k-h}f(x+k) \\ \iff (k-h)f(x) & \leq & kf(x+h) - hf(x+k) \\ \iff k\big(f(x) - f(x+h)\big) & \leq & -h\big(f(x+k) - f(x)\big) \\ \overset{h<0}{\iff} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \leq & \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \end{array}$$

- Es ist $h < k < 0$, dann ist $0 \leq (h-k)/h, k/h \leq 1$ und es folgt

$$\begin{array}{rcl} f(x+k) & = & f\left(\dfrac{k}{h}(x+h) + \dfrac{h-k}{h}x\right) \\ & \leq & \dfrac{k}{h}f(x+h) + \dfrac{h-k}{h}f(x) \\ \iff hf(x+k) & \leq & kf(x+h) + (h-k)f(x) \\ \iff -k\big(f(x+h) - f(x)\big) & \leq & -h\big(f(x+k) - f(x)\big) \\ \iff \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \leq & \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \end{array}$$

Sei nun $x \in \,]a,b[$ und $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(x) \subset \,]a,b[$. Es ist nach obigem für $h > 0$ die Funktion $h \mapsto h^{-1}\big(f(x+h) - f(x)\big)$ monoton steigend und nach unten durch $-\varepsilon^{-1}\big(f(x-\varepsilon) - f(x)\big)$ beschränkt, also existiert

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: D^+f(x)$$

analog schließt man, dass

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =: D^-f(x)$$

existiert. Also ist f rechts– und linksseitig diff'bar, damit links– und rechtsseitig stetig, also stetig.
Nein f muss keine Lipschitzabbildung sein, als Gegenbeispiel betrachte $f : \,]0,1[\, \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-1}$. f ist konvex, da f zweimal stetig differenzierbar ist und

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$$

für alle $0 < x < 1$ gilt, f ist aber keine Lipschitzabbildung, da

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

auf $]0,1[$ unbeschränkt ist und die Lipschitzeigenschaft für stetig differenzierbare Funktionen zur Beschränktheit der Ableitung äquivalent ist.

7.2.3 Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichung (7.1), dass jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Differenz zweier monoton steigender Funktionen geschrieben werden kann.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Definiere für $x \in \mathbb{R}$:

$$f_+(x) := f(0) + \int_0^x \max\{0, f'(t)\}\, dt$$

und

$$f_-(x) := \int_0^x \max\{0, -f'(t)\}\, dt.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung sind $f_\pm : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit Ableitungen

$$f_+'(x) = \max\{0, f'(x)\} \geq 0, \quad f_-'(x) = \max\{0, -f'(x)\} \geq 0$$

also monoton steigend.
Weiter gilt nach Gleichung 7.1, dass für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt \\ &= f(0) + \int_0^x \big(\max\{0, f'(t)\} + \min\{0, f'(t)\}\big)\,dt \\ &= f(0) + \int_0^x \big(\max\{0, f'(t)\} - \max\{0, -f'(t)\}\big)\,dt \\ &= f(0) + \int_0^x \max\{0, f'(t)\}\,dt - \int_0^x \max\{0, -f'(t)\}\,dt \\ &= f_+(x) - f_-(x) \end{aligned}$$

Damit ist f als Differenz monoton steigender Funktionen dargestellt.

7.2.4 Mit Hilfe von Korollar 7.2.1 ist zu zeigen, dass jede zweimal stetig differenzierbare Funktion Differenz konvexer Funktionen ist.
Sei also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dann ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, nach Aufgabe 7.2.3 gibt es also monoton steigende stetig differenzierbare Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f' = g - h$, wähle Funktionen $G, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $G(0) = f(0)$, $H(0) = 0$ und $G' = g$, $h' = h$.
Dann ist $H'' = h' \geq 0$, $G'' = g' \geq 0$, da g, h monoton steigend sind, also sind H und G nach Korollar 7.2.1 konvex, weiterhin ist $f(0) = G(0) - H(0)$ und

$$(f - G + H)' = f' - G' + H' = g - h - g + h = 0$$

also $f = G - H$.
Damit ist f als Differenz konvexer Funktionen dargestellt.

Zu Abschnitt 7.3

7.3.1 Wir haben in Abschnitt 7.3 die Länge für Kurven definiert, die als Graphen geschrieben werden können. Zeigen Sie, das diese Länge linear ist: Wird eine Kurve mit dem Faktor $a > 0$ multipliziert, so ist auch die Länge mit a zu multiplizieren. Außerdem ist die Längendefinition translationsinvariant: Ersetzt man f durch $f + c$ für eine Konstante c, so ergibt sich die gleiche Länge.

- (Streckungsverträglichkeit)

  Es sei also $f : [\,\alpha, \beta\,] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, streckt man ihren Graphen

  $$\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in [\,\alpha, \beta\,]\Big\}$$

  mit $a > 0$, so erhält man

  $$\begin{aligned} a\Gamma_f &= \Big\{\big(ax, af(x)\big) \mid x \in [\,\alpha, \beta\,]\Big\} \\ &= \Big\{\big(\xi, af(\xi/a) \mid \xi \in Ia\alpha a\beta\Big\} \end{aligned}$$

  also den Graphen der Abbildung $f_a : [\,a\alpha, a\beta\,] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto af(x/a)$, nun gilt für die Längen $L(f)$ resp. $L(f_a)$ der Grahpen wegen

  $$f_a'(x) = a\frac{d}{dx} f\left(\frac{x}{a}\right) = a \cdot \frac{1}{a} f'\left(\frac{x}{a}\right) = f'\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\begin{aligned}
L(f_a) &= \int_{a\alpha}^{a\beta} \sqrt{1+f_a'(x)^2}\,dx \\
&= \int_{a\alpha}^{a\beta} \sqrt{1+f'\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+f'\left(\frac{ax}{a}\right)^2}\,d(ax) \\
&= a\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \\
&= aL(f),
\end{aligned}$$

quod erat demonstrandum.

- (Verschiebung)
  Verschiebt man f um c, so haben wir wegen $(f+c)' = f'$, dass

$$\begin{aligned}
L(f+c) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+(f+c)'(x)^2}\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \\
&= L(f).
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

7.3.2 Die Längendefinition ist verträglich: Zeigen Sie, dass sich für Strecken der richtige Wert ergibt.
Sei also Γ die Strecke von $x = (x_1, x_2)$ nach $y = (y_1, y_2)$ (mit $x, y \in \mathbb{R}^2$), wobei o.E. $x_1 < y_1$ sei[1)], dann lässt Γ als Graph der Funktion

$$f : [\,x_1, y_1\,] \to \mathbb{R}\,, \quad t \mapsto x_2 + \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}(x - x_1)$$

auffassen, es ist für $t \in [\,x_1, y_1\,]$:

$$f'(t) = \frac{y_2 - x_2}{y_1 - x_1}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_{x_1}^{y_1} \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt \\
&= \int_{x_1}^{y_1} \sqrt{1+\frac{(y_2-x_2)^2}{(y_1-x_1)^2}}\,dt \\
&= (y_1-x_1)\sqrt{1+\frac{(y_2-x_2)^2}{(y_1-x_1)^2}}\,dt \\
&= \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}
\end{aligned}$$

Das ist aber genau dieselbe Länge, die sich elementargeometrisch nach dem Satz des Pythagoras ergibt.

7.3.3 Berechnen Sie die Länge des Graphen der durch $f(x) := x^{3/2}$ definierten Funktion $f : [\,1, 2\,] \to \mathbb{R}$. (Das ist eines der ganz wenigen Beispiele, für die das zur Länge führende Integral wirklich ausgerechnet werden kann.)
Wir haben für $x \in [\,1, 2\,]$, dass

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2},$$

[1)]Im Fall $y_1 < x_1$ tausche x und y, im Fall $x_1 = y_1$ vertausche die erste mit der zweiten Komponente, d.h. führe auf $\mathbb{R}^2$ eine Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden durch.

also:

$$\begin{aligned}
L(f) &= \int_1^2 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \\
&= \frac{4}{9}\int_{9/4}^{18/4} \sqrt{1+x}\,dx \\
&= \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1+x)^{3/2}\Big|_{9/4}^{18/4} \\
&= \frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{11}{2}\right)^{3/2}-\left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right) \\
&= \frac{8}{27}\cdot\left(\left(\frac{1331}{8}\right)^{1/2}-\left(\frac{2197}{64}\right)^{1/2}\right) \\
&= \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{11}{4}\sqrt{22}-\frac{13}{8}\sqrt{13}\right) \\
&= \frac{1}{27}\cdot\big(22\sqrt{22}-13\sqrt{13}\big).
\end{aligned}$$

Zu Abschnitt 7.4

7.4.1 Sei f einen Funktion, für die $\mathcal{L}f$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{L}f)(s) \to 0$ für $s \to \infty$.
Es sei also $f : [\,0, +\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ stetig und M, s_0 so, dass

$$|f(t)| \le M\mathrm{e}^{s_0 t}$$

für $t \in [\,0, +\infty\,[$ gilt. Dann ist $(\mathcal{L}f)$ auf $]\,s_0, \infty\,[$ erklärt.
Es sei $\varepsilon > 0$, wähle $T > 0$, so dass

$$\int_T^\infty \mathrm{e}^{-(s_0+1)t}|f(t)|\,dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

das ist möglich, da

$$(\mathcal{L}f)(s_0+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s_0+1)t}|f(t)|\,dt$$

nach Voraussetzung exisitiert. Wähle nun weiter $s_1 > s_0$ so, dass

$$M\left(\frac{\mathrm{e}^{(s_0-s_1)T}-1}{s_0-s_1}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

was möglich ist, da dieser Term für $s_1 \to \infty$ gegen Null geht.
Es folgt, dass für $s \ge s_1$ gilt:

$$\begin{aligned}
|(\mathcal{L}f)(s)| &\le \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}|f(t)|\,dt \\
&\overset{s\,\ge\,s_1}{\le} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s_1 t}|f(t)|\,dt \\
&= \int_0^T \mathrm{e}^{-s_1 t}|f(t)|\,dt + \int_T^\infty \mathrm{e}^{-s_1 t}|f(t)|\,dt \\
&\le \int_0^T M\mathrm{e}^{(s_0-s_1)t}\,dt + \int_T^\infty \mathrm{e}^{-(s_0+1)t}|f(t)|\,dt \\
&\le M\left(\frac{\mathrm{e}^{(s_0-s_1)T}-1}{s_0-s_1}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{L}f)(s) \to 0$ für $s \to \infty$ gezeigt.

7.4.2 Finden Sie die Laplacetransformation von $t \mapsto e^{at}$.
Siehe Seite 195 im Buch (das war ein Fehler beim Stellen der Aufgaben).

7.4.3 Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

mit der Methode der Laplacetransformation.
Unter der Annahme, daß die Lösungsfunktion der gegebenen Differentialgleichung höchstens exponentiell wächst, kann man auf die Differentialgleichung

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{3t}$$

die Laplacetransformation anwenden. Seien $s_0, M \in \mathbb{R}$ Wachstumskonstanten für die Lösung.
Man erhält aufgrund der Linearität folgende Gleichung für die Laplacetransformierte $\mathcal{L}y(s)$ für $s > \max\{s_0, 3\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}y''(s) - 3\mathcal{L}y'(s) + 2\mathcal{L}y(s) &= \frac{1}{s-3} \\
\overset{(b)}{\Rightarrow} s^2\mathcal{L}y(s) - sy(0) - y'(0) - 3s\mathcal{L}y(s) + 3y(0) + 2\mathcal{L}ys &= \frac{1}{s-3} \\
\overset{\text{geg. AW}}{\Rightarrow} s^2\mathcal{L}y(s) - s - 0 - 3s\mathcal{L}y(s) + 3 + 2\mathcal{L}ys &= \frac{1}{s-3} \\
\iff (s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}y(s) - s + 3 &= \frac{1}{s-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff (s-1)(s-2)\mathcal{L}y(s) &= \frac{1}{s-3} + s - 3 \\
\iff \mathcal{L}y(s) &= \frac{1 + (s-3)^2}{(s-1)(s-2)(s-3)} \\
\iff \mathcal{L}y(s) &= \frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)}
\end{aligned}$$

Die rechte Seite obiger Gleichung zerlegt man nun in Partialbrüche. Man macht den Ansatz

$$\frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-2} + \frac{c}{s-3}$$

und erhält:

$$\begin{aligned}
\frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)} &= \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s-2} + \frac{c}{s-3} \\
&= \frac{a(s^2 - 5s + 6) + b(s^2 - 4s + 3) + c(s^2 - 3s + 2)}{(s-1)(s-2)(s-3)} \\
&= \frac{(a+b+c)s^2 + (-5a - 4b - 3c)s + (6a + 3b + 2c)}{(s-1)(s-2)(s-3)}
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein LGS in a, b, c:

$$\begin{array}{rcrcrcr}
a & + & b & + & c & = & 1 \\
-5a & - & 4b & - & 3c & = & -6 \\
6a & + & 3b & + & 2c & = & 10
\end{array}$$

Dies löst man mittels elmentarer Umformungen:

$$
\begin{array}{rcl|rrr|r}
 & & \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \mathrm{II} & -5 & -4 & -3 & -6 \\
 & & \mathrm{III} & 6 & 3 & 2 & 10 \\
\hline
 & & \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathrm{II}+5\mathrm{I} & = & \mathrm{IV} & 0 & 1 & 2 & -1 \\
\mathrm{III}-6\mathrm{I} & = & \mathrm{V} & 0 & -3 & -4 & 4 \\
\hline
 & & \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \mathrm{IV} & 0 & 1 & 2 & -1 \\
\mathrm{V}+3\mathrm{IV} & = & \mathrm{VI} & 0 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
 & & \mathrm{I} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathrm{IV}-\mathrm{VI} & = & \mathrm{VII} & 0 & 1 & 0 & -2 \\
\frac{1}{2}\mathrm{VI} & = & \mathrm{VIII} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\
\hline
\mathrm{I}-\mathrm{VII}-\mathrm{VIII} & = & \mathrm{IX} & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\
 & & \mathrm{VII} & 0 & 1 & 0 & -2 \\
 & & \mathrm{VIII} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Also ist $a = \frac{5}{2}, b = -2, c = \frac{1}{2}$ die Lösung des Gleichungssystems.
Also gilt

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-3}$$

Wegen (a) und der Linearität der Laplacetransformation ist dies die Laplacetransformierte von

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}$$

Da diese Funktion tatsächlich nur exponentiell wächst, durfte man die Laplacetransformation auf die DGL anwenden. Man muß nun noch überprüfen, ob $y(t)$ tatsächlich Lösung des gegebenen AWP ist:
Dazu leitet man zunächst zweimal ab:

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{5}{2}\mathrm{e}^{t} - 4\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{3t} \\
y''(t) &= \frac{5}{2}\mathrm{e}^{t} - 8\mathrm{e}^{2t} + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{3t}
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

$$
\begin{aligned}
y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) &= \left(\frac{5}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-8 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2)\,\mathrm{e}^{2t} \\
&\quad + \left(\frac{9}{2} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{3t} \\
&= \mathrm{e}^{3t}
\end{aligned}
$$

Also genügt $y(t)$ der geg. DGL, da $y(t)$ wegen

$$
\begin{aligned}
y(0) &= \frac{5}{2}\mathrm{e}^{0} - 2\mathrm{e}^{0} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{0} \\
&= 1 \\
y'(0) &= \frac{5}{2}\mathrm{e}^{0} - 4\mathrm{e}^{0} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

auch den Anfangswertbedingungen genügt, ist

$$y(t) = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3t}$$

eine Lösung des geg. AWP.

Zu Abschnitt 7.5

7.5.1 Sei $m \in \mathbb{N}$. Die Zahlen, die für jedes m zu m-ter Ordnung rational approximierbar sind, liegen dicht in $\mathbb{R}$.
Das ist klar, da rationale Zahlen zu jeder Ordnung rational approximierbar sind (vgl. Bem. 3 nach Definition 7.5.1 auf Seite 202), und $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt.

7.5.2 Es seien $a > 0$ und $b > 0$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Zeigen Sie, dass dann auch ab, $a + b$, a/b und $\sqrt{a}$ konstruierbar sind.
Seien also Strecken der Länge $a, b > 0$ und 1 vorgegeben, wir haben Strecken der Länge $a + b$, ab, a/b und $\sqrt{a}$ zu konstruieren:

- $a+b$: Zeichne einen Punkt P und von ihm Ausgehend einen Strahl g. Schlage einen Kreis um P mit dem Radius a, dieser Schneidet g in genau einem Punkt Q (die Strecke PQ hat die Länge a), schlage nun um Q einen Kreis mit Radium b, er schneidet g in mindestens einem Punkt, nenne den Punkt, der nicht auf der Seite von P liegt R, dann hat QR die Länge b und somit PR die Länge $a + b$.
- ab: Zeichne einen Punkt P und von ihm ausgehend zwei nicht kollineare Strahlen g_a und g_b, trage mit dem Zirkel auf g_a einen Punkt P_a an, so dass PP_a die Länge a hat und einen Punkt P_1, so dass PP_1 die Länge 1 hat, trage auf g_b einen Punkt P_b an, so dass PP_b die Länge b hat. Vebinde P_1 und P_b durch eine Gerade g und konstruiere die Parallele h zu g, die durch P_a geht, sie scheidet g_b in genau einem Punkt Q. Nach dem Strahlensatz hat PQ die Länge ab, denn:
$$PQ = PP_b \frac{PQ}{PP_b} = PP_b \frac{PP_a}{PP_1} = b \cdot \frac{a}{1} = ab.$$
- a/b: Zeichne einen Punkt P und von ihm ausgehend zwei nicht kollineare Strahlen g_a und g_b, trage mit dem Zirkel auf g_a einen Punkt P_a an, so dass PP_a die Länge a hat und auf g_b Punkte P_1, P_b, so dass PP_1 die Länge 1 und PP_b die Länge b hat. Vebinde P_a und P_b durch eine Gerade g und konstruiere die Parallele h zu g, die durch P_1 geht, sie scheidet g_a in genau einem Punkt Q. Nach dem Strahlensatz hat PQ die Länge a/b, denn:
$$PQ = PP_a \frac{PQ}{PP_a} = PP_a \frac{PP_1}{PP_b} = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$
- $\sqrt{a}$: Zeichne einen Punkt P und durch ihn eine Gerade g, trage auf den Seiten von P Strecken der Länge a und 1 an, erhalte so Punkte P_1, P_a auf verschieden Seiten von P, so dass PP_1 die Länge 1 und PP_a die Länge a hat. Schlage um den Mittelpunkt von P_1P_a den Kreis k, der durch P_1 und P_a geht, und errichte in P die Senkrechte zu g. k und g schneiden sich in zwo Punkten, sei R derjenige von ihnen, für den P_1P_aR in mathematisch positiver Reihenfolge stehen. Nach dem Satz des Thales ist ΔP_1P_aR ein rechtwinkliges Dreieck mit Höhe PR und Hypotenusenabschnitten PP_1 und PP_a. Nach dem Höhensatz gilt
$$PR = \sqrt{PP_1 \cdot PP_a} = \sqrt{1 \cdot a} = \sqrt{a}.$$

7.5.3 Die Zahl $\sqrt[22]{\pi}$ ist nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
Wäre $\alpha := \sqrt[22]{\pi}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar, so wäre α insbesondere algebraisch, da die algebraischen Zahlen einen Körper bilden, wäre dann auch $\alpha^{22} = \pi$ algebraisch. Widerspruch.
Also ist α nicht konstruierbar.

Zu Abschnitt 7.6

7.6.1 Man betrachte das Anfangswertproblem $y' = 3|y|^{2/3}$, $y(0) = 0$. Prüfen Sie nach, dass sowohl $y = 0$ als auch $y = x^3$ Lösungen sind. Warum widerspricht das nicht dem Satz von Picard-Lindelöf?

- $y_1(x) = 0$ ist Lösung, da $y_1(0) = 0$ und
$$y_1'(x) = 0 = 3|0|^{2/3} = 3|y_1(x)|^{2/3}$$
gelten.

- $y_2(x) = x^3$ ist Lösung, da $y_2(0) = 0^3 = 0$ und

$$y_2'(x) = 3x^2 = 3\left|x^3\right|^{2/3} = 3|y_2(x)|^{2/3}$$

Diese Nicht–Eindeutigkeit ist kein Widerspruch zum Satz von Picard–Lindelöf, da $f(x) = 3|x|^{2/3}$ in keiner Umgebung der Null Lipschitz–stetig ist:
Denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist die beste Lipschitzkonstante für f auf $[\,\varepsilon/2, \varepsilon\,]$ durch

$$\sup_{\varepsilon/2 \le x \le \varepsilon} \left|f'(x)\right| = \sup_{\varepsilon/2 \le x \le \varepsilon} 2x^{-1/3} = 2^{4/3}\varepsilon^{-1/3}$$

gegeben, insbesondere gibt es kein $\varepsilon \geq 0$, so dass f auf $[\,-\varepsilon, \varepsilon\,]$ Lipschitzabbildung ist.

7.6.2 Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abschnitt 7.6, betrachtet wird das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$. Für jede Funktion y konvergieren die Iterationen $y, Ty, T^2y, \ldots$ auf einem genügend kleinen Intervall gegen eine Lösung. Berechnen Sie diese Funktionen[2] für den Fall, dass y die konstante Funktion $\mathbf{1}$ ist.
Wir behaupten, dass

$$(T^n\mathbf{1})(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ und beweisen dies durch vollständige Induktion:

- **Induktionsanfang** Für $n = 0$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$(T^0\mathbf{1})(x) = \mathbf{1}(x) = 1$$

  und

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}x^k = \frac{1}{0!}x^0 = 1,$$

  was zu zeigen war.

- **Induktionsvoraussetzung** Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(T^{n-1}\mathbf{1})(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}x^k$$

- **Induktionsschluss** Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
(T^n\mathbf{1})(x) &= \big(T(T^{n-1}\mathbf{1})\big)(x) \\
&\overset{\text{Def. von } T}{=} 1 + \int_0^x (T^{n-1}\mathbf{1})(t)\,dt \\
&\overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{=} 1 + \int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}t^k\,dt \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \int_0^x t^k\,dt \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!}x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k.
\end{aligned}$$

  Das war aber zu zeigen.

---

[2] Sie heißen die *Picard-Iterationen*.

7.6.3 Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Geben Sie eine Differentialgleichung an, für die der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist, die eine Lösung auf $]\,x_0 - \delta, x_0 + \delta\,[$, aber auf keinem Intervall $]\,x_0 - \eta, x_0 + \eta\,[$ mit $\eta > \delta$ besitzt.
Betrachte das AWP

$$y(x_0) = -\frac{1}{\delta^2}, \quad y'(x) = -2(x - x_0)y(x)^2$$

Die Funktion $f(x, y) = -2(x - x_0)y^2$ ist in y stetig differenzierbar, also insbesondere lokal Lipschitz–stetig in y. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf ist also das AWP in einer Umgebung von x_0 eindeutig lösbar. Auf $]\,x_0 - \delta, x_0 + \delta\,[$ ist eine Lösung durch

$$y(x) := \frac{1}{(x - x_0 - \delta)(x - x_0 + \delta)}$$

gegeben, denn

$$y(x_0) = \frac{1}{(x_0 - x_0 - \delta)(x_0 - x_0 + \delta)} = -\frac{1}{\delta^2}$$

und

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\frac{1}{(x - x_0 - \delta)^2} \cdot \frac{1}{(x - x_0 + \delta)} - \frac{1}{(x - x_0 - \delta)} \cdot \frac{1}{(x - x_0 + \delta)^2} \\ &= -\frac{x - x_0 + \delta + x - x_0 - \delta}{(x - x_0 - \delta)^2 (x - x_0 + \delta)^2} \\ &= -2(x - x_0)y(x)^2 \end{aligned}$$

Gäbe es eine Lösung $y :]\,x_0 - \eta, x_0 + \eta, \to [\,\mathbb{R}$ mit $\eta > \delta$, so müsste diese auf $]\,x_0 - \delta, x_0 + \delta\,[$ mit obiger übereinstimmen, was $\eta > \delta$ widerspricht, da obige Lösung in $x_0 \pm \delta$ Pole hat und so nicht über $x_0 \pm \delta$ hinaus stetig fortgesetzt werden kann.