Zu Abschnitt 6.1

Zu Abschnitt 6.1

6.1.1 Man zeige direkt (ohne Verwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung):

a) $t \mapsto t^2$ ist integrierbar auf $[0,1]$, und $\int_0^1 t^2 dt = 1/3$.

b) $t \mapsto 1/t$ ist integrierbar auf $[1, \mathrm{e}]$, und $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{dt}{t} = 1$.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, man definiere zwei Treppenfunktionen $\tau_1^{(n)}$ und $\tau_2^{(n)}$ durch

$$\begin{array}{rcl} \tau_1^{(n)} : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} (\frac{k}{n})^2 & \exists 0 \le k \le n-1 : x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \tau_2^{(n)} : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} (\frac{k+1}{n})^2 & \exists 0 \le k \le n-1 : x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Man zeigt nun $\tau_1^{(n)} \le f \le \tau_2^{(n)}$ auf $[0,1]$, sei also $x \in [0,1]$ beliebig, dann gilt

- Im Fall $x = 1$ ist $\tau_1^{(n)}(1) = f(1) = \tau_2^{(n)}(1) = 1$, also gilt die Behauptung.
- Im Fall $x < 1$ existiert genau ein $0 \le k \le n-1$ mit $x \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, dann gilt $\frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n}$ und aufgrund der Monotonie der Quadratfunktion auch:

  $$\tau_1^{(n)}(x) = (\frac{k}{n})^2 \le f(x) = x^2 \le \tau_2^{(n)}(x) = (\frac{k+1}{n})^2$$

  Dies war aber die Behauptung.

Man bestimmt als nächstes die Integrale der Treppenfunktionen $\tau_1^{(n)}$ und $\tau_2^{(n)}$ über $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau_1^{(n)}(t)\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \cdot \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \\ &= \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau_2^{(n)}(t)\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \cdot \left(\frac{k+1}{n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \end{aligned}$$

Da f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ beschränkt ist, existieren das Ober- und Unterintegral von f und es gilt $I_*(f) \leq I^*(f)$, weiterhin gilt aufgrund der Definition von Ober- und Unterintegral:

$$\begin{aligned}
I_*(f) &= \sup_{\substack{\tau \in \mathrm{Tr}[0,1] \\ \tau \leq f}} \int_0^1 \tau(t)\ dt \\
&\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 \tau_1^{(n)}(t)\ dt \\
&= \sup_n \in \mathbb{N} \frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^*(f) &= \inf_{\substack{\tau \in \mathrm{Tr}[0,1] \\ \tau \geq f}} \int_0^1 \tau(t)\ dt \\
&\leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \int_0^1 \tau_2^{(n)}(t)\ dt \\
&= \inf_n \in \mathbb{N} \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Zusammen gilt also $I^*(f) \leq \frac{1}{3} \leq I_*(f)$, wegen $I_*(f) \leq I^*(f)$ (dies gilt wegen Lemma 1.4 stets) folgt

$$I_*(f) = I^*(f) = \frac{1}{3}$$

also ist f auf $[0,1]$ integrierbar mit $\int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}$.

b) Man zeigt zunächst als Vorbereitung:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^x \geq 1 + x$$

Für $x = 0$ gilt die Behauptung wegen $\mathrm{e}^0 = 1$, sei also $x \neq 0$, dann existiert nach dem Zwischenwertsatz ein ξ ziwschen 0 und x mit

$$\mathrm{e}^\xi = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \iff \mathrm{e}^x = 1 + x\mathrm{e}^\xi$$

Man unterscheidet nun zwei Fälle:

- $x > 0$
  Hier ist $\xi \in (0,x)$, also $\xi > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^\xi > 1$ und damit

$$\mathrm{e}^x = 1 + x\mathrm{e}^\xi \overset{x>0,\,\mathrm{e}^\xi>1}{>} 1 + x$$

- $x < 0$
  Hier gilt analog $\xi < 0, \mathrm{e}^\xi < 1$, also

$$\mathrm{e}^x = 1 + x\mathrm{e}^\xi = 1 - (-x)\mathrm{e}^\xi \overset{-x>0,\,\mathrm{e}^\xi<1}{>} 1 - (-x) = 1 + x$$

Das war aber zu zeigen.
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, betrachte die beiden Treppenfunktionen $\tau_1^{(n)}$ und $\tau_2^{(n)}$ definiert durch:

$$\begin{aligned}
\tau_1^{(n)} : [1, \mathrm{e}] &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} & \exists 0 \leq k \leq n-1 : x \in [\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}}) \\ \mathrm{e}^{-1} & x = \mathrm{e} \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{array}{rcl} \tau_2^{(n)} : [1,\mathrm{e}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-\frac{k+1}{n}} & \exists 0 \le k \le n-1 : x \in [\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}}) \\ \mathrm{e}^{-1} & x = \mathrm{e} \end{array} \right. \end{array}$$

Man zeigt nun $\tau_2^{(n)} \le f \le \tau_1^{(n)}$ auf $[1,\mathrm{e}]$, sei also $x \in [1,\mathrm{e}]$ beliebig, dann gilt

- Im Fall $x = \mathrm{e}$ ist $\tau_1^{(n)}(\mathrm{e}) = f(\mathrm{e}) = \tau_2^{(n)}(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$, also gilt die Behauptung.
- Im Fall $x < \mathrm{e}$ existiert genau ein $0 \le k \le n-1$ mit $x \in [\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}, \mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}})$, da die Exponentialfunktion bijektiv und streng monoton steigend ist, dann gilt $\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \le x \le \mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}}$ und damit der Exponentialfunktion auch:

$$\tau_2^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{k+1}{n}} \le f(x) = \frac{1}{x} \le \tau_1^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}}$$

Dies war aber die Behauptung.

Man bestimmt als nächstes die Integrale der Treppenfunktionen $\tau_1^{(n)}$ und $\tau_2^{(n)}$ über $[1,\mathrm{e}]$:

$$\begin{array}{rcl} \int_1^{\mathrm{e}} \tau_1^{(n)}(t)\,dt & = & \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k}{n}} \right] \\ & = & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ & = & n \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ \int_1^{\mathrm{e}} \tau_2^{(n)}(t)\,dt & = & \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\mathrm{e}^{\frac{k+1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{k+1}{n}} \right] \\ & = & \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \right) \\ & = & n \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \right) \end{array}$$

Aufgrund der Vorüberlegung gilt nun:

$$\begin{array}{rcl} \int_1^{\mathrm{e}} \tau_1^{(n)}(t)\,dt & = & n \cdot \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \\ & \ge & n \cdot \left(1 + \frac{1}{n} - 1 \right) \\ & = & 1 \\ \int_1^{\mathrm{e}} \tau_2^{(n)}(t)\,dt & = & n \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \\ & \le & n \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{n} \right) \\ & = & 1 \end{array}$$

Weiter gilt mit Hilfe der Regel von l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n\cdot(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\cdot(e^x-1)\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x-1}{x}\\
&\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x}{1}\\
&= 1\\
\lim_{n\to\infty} n\cdot(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}\cdot(1-\mathrm{e}^{-x})\\
&= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\\
&\overset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Daraus und aus obiger Abschätzung für die Integrale von $\tau_1^{(n)}$ und $\tau_2^{(n)}$ folgt unmittelbar:

$$\inf_n \in \mathbb{N} \int_1^{\mathrm{e}} \tau_1^{(n)}(t)\,dt = 1 = \sup_n \in \mathbb{N} \int_1^{\mathrm{e}} \tau_2^{(n)}(t)\,dt$$

Für Ober- und Unterintegral der Funktion g ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
I_*(g) &= \sup_{\substack{\tau\in\mathrm{Tr}[1,\mathrm{e}]\\ \tau\le f}} \int_1^{\mathrm{e}} \tau(t)\,dt\\
&\ge \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_1^{\mathrm{e}} \tau_2^{(n)}(t)\,dt\\
&= 1\\
I^*(g) &= \inf_{\substack{\tau\in\mathrm{Tr}[1,\mathrm{e}]\\ \tau\ge f}} \int_1^{\mathrm{e}} \tau(t)\,dt\\
&\le \inf_{n\in\mathbb{N}} \int_1^{\mathrm{e}} \tau_1^{(n)}(t)\,dt\\
&= 1
\end{aligned}$$

Also gilt $I_*(g) \ge 1 \ge I^*(g)$, nach Lemma 1.4 gilt aber $I_*(g) \le I^*(g)$, also gilt $I_*(g) = I^*(g) = 1$, i.e. g ist integrierbar auf $[1,\mathrm{e}]$ und es gilt $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{dt}{t} = 1$.
Das war aber zu zeigen.

6.1.2 Man zeige, dass

$$t \mapsto \begin{cases} t & \text{falls } t \text{ rational}\\ 0 & \text{falls } t \text{ irrational}\end{cases}$$

nicht integrierbar auf $[\,0,1\,]$ ist.
Nach Lemma 1.4(ii) ist nur zu zeigen:

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\tau_1,\tau_2\in\mathrm{Tr}[0,1] : \tau_1\le h\le\tau_2 \Rightarrow \int_0^1 (\tau_2-\tau_1)(t)\,dt > \varepsilon$$

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{5}$, seien $\tau_1,\tau_2\in\mathrm{Tr}[0,1]$ mit $\tau_1\le h\le\tau_2$.

- Man zeigt zunächst: $\int_0^1 \tau_1(t)\,dt \le 0$:
  Da τ_1 n.V. eine Treppenfunktion ist, kann man $n\in\mathbb{N}$ und $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ so wählen, daß τ_1 für $0\le k\le n-1$ auf (x_k,x_{k+1}) konstant ist, sei der Wert von $\tau_1(t)$ auf diesem Intervall mit c_k bezeichnet.

Für alle $0 \leq k \leq n-1$ existiert nun aber aufgrund der Dichtheit der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ eine irrationale Zahl r so, daß $x_k < r < x_{k+1}$, wegen $\tau_1 \leq h$ folgt $c_k = \tau_1(r) \leq h(r) = 0$, da r irrational ist.
Man erhält nun:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau_1(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1}-x_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} 0\cdot(x_{k+1}-x_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

- Nun zeigt man: $\int_0^1 \tau_2(t)\,dt \geq \frac{1}{4}$:
  Auch für τ_2 existiert n.V. ein $n \in \mathbb{N}$ und $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, so daß τ_2 für alle $0 \leq k \leq n-1$ auf (x_k, x_{k+1}) konstant gleich $c_k \in \mathbb{R}$ ist. O.E. gebe es ein $0 < k_0 < n$ mit $x_{k_0} = \frac{1}{2}$ (kann durch Einfügen eines weiteren Unterteilungspunktes stets erreicht werden.
  Wegen $\tau_2 \geq h \geq 0$ n.V., gilt für alle k: $c_k \geq 0$, weiterhin existiert aber zu jedem $k_0 \leq k \leq n-1$ eine rationale Zahl r mit $x_{k_0} \leq x_k < r < x_{k+1}$ ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$), also gilt:

$$c_k = \tau_2(r) \geq h(r) = r \geq x_{k_0} = \frac{1}{2}$$

  somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau_2(t)\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1}-x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1} c_k(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=k_0}^{n-1} c_k(x_{k+1}-x_k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{k_0-1} 0\cdot(x_{k+1}-x_k) + \sum_{k=k_0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=k_0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) \\ &\overset{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{2}(x_n - x_{k_0}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Man erhält also, da die Integration auf dem Vektorraum der Treppenfunktionen über $[0,1]$ eine lin. Abbildung ist:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\tau_2-\tau_1)(t)\,dt &= \int_0^1 \tau_2(t)\,dt - \int_0^1 \tau_1(t)\,dt \\ &\geq \frac{1}{4} - 0 \\ &= \frac{1}{4} > \frac{1}{5} = \varepsilon \end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen, somit ist h nach Lemma 1.4(ii) über $[0,1]$ nicht intgrierbar.

6.1.3 Wir haben bewiesen, dass $\mathrm{Tr}\,[\,a,b\,]$ $(a<b)$ ein Vektorraum ist.

a) Man zeige, dass $\mathrm{Tr}\,[\,a,b\,]$ unendlich-dimensional ist.

b) Zeigen Sie, dass mit $f, g \in \mathrm{Tr}\,[\,a, b\,]$ auch $f \cdot g$ in $\mathrm{Tr}\,[\,a, b\,]$ liegt.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig, dann:

a) Um zu zeigen, daß $\mathrm{Tr}[a, b]$ unendlichdeimensional ist, reicht es zu zeigen, daß $\mathrm{Tr}[a, b]$ eine unendliche linear unabhängige Teilmenge hat, betrachte dazu zu $n \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion $\tau_n \in \mathrm{Tr}[a, b]$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \tau_n : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x \leq a + \frac{b-a}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Man betrachte nun die Menge $M := \{\tau_n n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Tr}[a, b]$ offensichtlich ist M wegen $\tau_\mu \neq \tau_\nu$ für $\mu \neq \nu$ eine unendliche Menge.

Es bleibt zu zeigen, daß M lin. unabh. ist. Eine unendliche Menge heißt lin. unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge lin. unabh. ist. Sei also $A \subset M$ endlich. Zu zeigen ist, daß A lin. unabh. ist. Man zeigt dies durch vollst. Induktion nach der Anzahl $k \in \mathbb{N}$ der Elemente von A:

- Induktionsverankerung: $|A| = k = 1$

  Es sei $A = \{\tau_l\} \subset M$ beliebig. Wegen $\tau_l \neq 0$ (die Nullfunktion), da wegen:

  $$a < a + \frac{b-a}{2l}$$

  sicher $\tau_l(a) = 1$ gilt,ist $\{\tau_l\}$ lin. unabhängig.

- Induktionsvoraussetzung:

  Für beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}$ gelte, daß alle höchstens k-elementigen Teilmengen von M lin. unabhängig sind.

- Induktionsschluß:

  Es sei $A \subset M$ mit $|A| = k + 1$, etwa $A = \{\tau_{n_1}, \ldots, \tau_{n_{k+1}}\}$ mit $n_i \neq n_j$ für $i \neq j$. Weiterhin seien $a_1, \ldots, a_{k+1} \in \mathbb{R}$ so, daß

  $$\sigma := \sum_{l=1}^{k+1} a_l \tau_{n_l} = 0 \text{ (die Nullfunktion)}$$

  zu zeigen ist: $\forall 1 \leq l \leq k+1 : a_l = 0$.

  Die Menge $\{n_i 1 \leq i \leq k + 1\}$ hat aufgrund der Wohlordnung von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element, o.E. sei dies n_1. Dann gilt $n_i > n_1$ für $1 \neq i$.

  Betrachte nun $x_0 := a + \frac{b-a}{2n_1}$ es gilt $x_0 \in [a, b]$ weiterhin ist, da σ n.V. die Nullfunktion ist, $\sigma(x_0) = 0$, andererseits aber gilt: $\tau_{n_1}(x_0) = 1$, aber für $2 \leq i \leq k+1$ gilt wegen $n_i > n_1$ auch

  $$x_0 = a + \frac{b-a}{2n_1} > a + \frac{b-a}{2n_i} \Rightarrow \tau_{n_i}(x_0) = 0$$

  $$\begin{aligned} \sigma(x_0) &= \sum_{l=1}^{k+1} a_l \tau_{n_l}(x_0) \\ &= \sum_{l=1}^{k+1} a_l \delta_{l1} \\ &= a_1 \end{aligned}$$

  Somit gilt $a_1 = 0$. Man betrachte nun die Menge $B := A \setminus \{\tau_{n_1}\}$, es gilt $|B| = k$, somit ist B nach Induktionsvoraussetzung lin. unabhängig. Da aber wegen $a_1 = 0$ gilt, daß σ eine Linearkombination von Elementen aus B ist, folgt

  $$a_2 = a_3 = \cdots = a_{k+1} = 0$$

  D.h. A ist lin. unabhängig, das war aber zu zeigen.

Somit ist M, da jede endliche Teilmenge von M lin. unabhängig ist, mithin auch lin. unabhängig, $\mathrm{Tr}[a,b]$ hat also eine unendliche lin. unabh. Teilmenge, ist also unendlichdimensional.

b) Es seien $f, g \in \mathrm{Tr}[a,b]$ beliebig.
z.Z.: $f \cdot g \in \mathrm{Tr}[a,b]$

Da $f \in \mathrm{Tr}[a,b]$, gibt es ein $n_f \in \mathbb{N}$ und eine Zerlegung $z^f = \{x_0^f, \ldots, x_{n_f}^f\}$ von $[a,b]$, so daß f für $0 \leq k \leq n_f - 1$ auf den Intervallen (x_k^f, x_{k+1}^f) konstant ist. Analog existiert ein $n_g \in \mathbb{N}$ und eine Zerlegung $z^g = \{x_0^f, \ldots, x_{n_g}^f\}$, so daß g für $0 \leq k \leq n_g - 1$ auf (x_k^g, x_{k+1}^g) konstant ist.

Man betrachte nun die Zerlegung $z := z^f \cup z^g$ von $[a,b]$, da z^f und z^g endlich sind, ist auch z endlich, gelte etwa mit $n \in \mathbb{N}$ geeignet

$$z = \{x_0, \ldots, x_n\}$$

Man zeigt nun, daß f und g für $0 \leq k \leq n-1$ auf (x_k, x_{k+1}) konstant sind, es sei $0 \leq k \leq n-1$ beliebig:

- Konstanz von f auf (x_k, x_{k+1}).

  Es sei $m \in \mathbb{N}$ maximal mit $x_m^f \leq x_k$. Dann gilt, da $z_f \subset z$ ist $x_{m+1}^f \geq x_{k+1}$. Da f aber auf (x_m^f, x_{m+1}^f) konstant ist, ist f auch auf $(x_k, x_{k+1}) \subset (x_m^f, x_{m+1}^f)$ konstant.

- Konstanz von g auf (x_k, x_{k+1}).

  Es sei $m \in \mathbb{N}$ maximal mit $x_m^g \leq x_k$. Dann gilt, da $z_g \subset z$ ist $x_{m+1}^g \geq x_{k+1}$. Da g aber auf (x_m^g, x_{m+1}^g) konstant ist, ist g auch auf $(x_k, x_{k+1}) \subset (x_m^f, x_{m+1}^g)$ konstant.

Mit f und g ist aber auch $f \cdot g$ für $0 \leq k \leq n-1$ auf (x_k, x_{k+1}) konstant, mithin eine Treppenfuktion, also gilt: $f \cdot g \in \mathrm{Tr}[a,b]$.

6.1.4 Beweisen oder widerlegen Sie: Für $f, g \in \mathrm{Int}\,[\,a,b\,]$ gilt

$$\int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \cdot \left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

(Siehe dazu auch Aufgabe 6.1.6.)

Beh.: Das oben behauptete ist falsch.

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man betrachte $\sigma, \tau \in \mathrm{Tr}[a,b] \subset \mathrm{Int}[a,b]$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma : [a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x \leq \frac{a+b}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tau : [a,b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sigma(x)\,dx &= \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\cdot 1 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)\cdot 0 \\
&= \frac{a+b}{2} - a \\
&= \frac{b-a}{2} \\
\int_a^b \tau(x)\,dx &= \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\cdot 0 + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)\cdot 1 \\
&= b - \frac{a+b}{2} \\
&= \frac{b-a}{2} \\
\left(\int_a^b \sigma(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \tau(x)\,dx\right) &= \frac{(b-a)^2}{4} \\
\int_a^b \sigma(x)\cdot\tau(x)\,dx &= \left(\frac{a+b}{2} - a\right)\cdot(1\cdot 0) + \left(b - \frac{a+b}{2}\right)\cdot(0\cdot 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Wegen $a < b$ ist $b - a > 0$ und damit $(b-a)^2 > 0$, also

$$\left(\int_a^b \sigma(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \tau(x)\,dx\right) \neq \int_a^b \sigma(x)\cdot\tau(x)\,dx$$

Das war aber zu zeigen.

6.1.5 Man finde eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen (f_n) auf $[0,1]$, so dass (f_n) punktweise gegen 0 konvergiert, die Integrale $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ aber mit $n \to \infty$ gegen Unendlich gehen.

Betrachte zu $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$\begin{aligned}
f_n : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

f_n ist auf $(0, \frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{n}, 1)$ konstant, mithin eine Treppenfunktion und somit Riemann-integrierbar.

Betrachte nun die Folge (f_n). Es gilt:

- $f_n \to 0$ (punktweise)

  Bew.:
  z.Z: $\forall x \in [0,1]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ Es sei $x \in [0,1], \varepsilon > 0$ beliebig, man unterscheidet zwei Fälle:

  a) $x = 0$
     Wähle $n_0 := 1$, dann gilt für alle $n \geq n_0$:

     $$|f_n(0)| = 0 \leq \varepsilon$$

  b) $0 < x \leq 1$
     Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \leq x$ für alle $x \geq n_0$ (Archimedesaxiom). Für die n gilt dann:

     $$|f_n(x)| = 0 \leq \varepsilon$$

  Also konvergiert (f_n) punktweise gegen 0.

- $\int_0^1 f_n(x)\,dx \not\to 0$
  Bew.:
  Es sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:
  $$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,dx &= n \cdot (\frac{1}{n} - 0) + 0 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \\ &= 1\end{aligned}$$
  Damit folgt
  $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$
  Also konvergiert $\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_n \in \mathbb{N}$ gegen 1, und damit nicht gegen 0.

Es gibt also eine Folge (f_n) von Funktionen über $[0,1]$, so daß zwar (f_n) punktweise gegen 0, aber $(\int_0^1 f_n(x)\,dx)$ nicht gegen 0 konvergiert.
Das war aber zu zeigen.

6.1.6 Für welche $f \in \mathrm{Tr}\,[\,0,1\,]$ gilt

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 ?$$

Man definiert zunächst folgendes:
Es sei $f \in \mathrm{Tr}[0,1]$ eine Treppenfunktion zu der Zerlegung $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von $[0,1]$. f heiße *fast konstant*, wenn gilt:

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall 0 \le k \le n-1\ \forall x \in (x_k, x_{k+1}) : f(x) = c$$

d.h. wenn f mit Ausnahme der Stützstellen überall den gleichen Wert hat.
Beh.: Es gilt für $f \in \mathrm{Tr}[0,1]$ folgende Äquivalenz

$$f \text{ fast konstant} \iff \int_0^1 f^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\right)^2$$

Bew.:

$\Longrightarrow$: Es sei $f \in \mathrm{Tr}[0,1]$ fast konstant. Dann gibt es eine Zerlegung $\{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[0,1]$ und ein $c \in \mathbb{R}$, so daß f für bel. $0 \le k \le n-1$ auf (x_k, x_{k+1}) den Wert c hat. Offenbar ist dann auch f^2 eine Treppenfunktion ($\mathrm{Tr}[0,1]$ ist eine Algebra) und fast konstant, da f^2 für alle $0 \le k \le n-1$ auf (x_k, x_{k+1}) den Wert c^2 annimmt. Für die Integrale gilt:

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} c \cdot (x_{k+1} - x_k)\right)^2 \\ &= \left(c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\right)^2 \\ &= c^2 \cdot (x_n - x_0)^2 \\ &= c^2 \cdot 1 \\ &= c^2 \\ \int_0^1 f^2(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n-1} c^2 \cdot (x_{k+1} - x_k) \\ &= c^2 \cdot (x_n - x_0) \\ &= c^2\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\right)^2$$

Das war aber zu zeigen.

$\Longleftarrow$: Man zeigt dies durch logische Umkehr, i.e. man zeigt daß die Gleichheit von $(\int_0^1 f(x)\,dx)^2$ und $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ für nicht fast konstantes f nicht gegeben ist.
Es sei also $f \in \mathrm{Tr}[0,1]$ nicht fast konstant, da f Treppenfunktion ist, existiert eine Zerlegung $\{x_0,\dots,x_n\}$ von $[0,1]$ und $c_0,\dots,c_{n-1}$ so daß

$$\forall 0 \le k \le n-1\ \forall x \in (x_k, x_{k+1}) : f(x) = c_k$$

Da f n.V. nicht fastkonstant ist existiert $m \in \mathbb{N}$ mit $0 \le m \le n-1$ so daß $c_0 \neq c_m$.
Man zeigt zunächst: Es ist $\int_0^1 f^2(x)\,dx > 0$:
Wegen $c_0 \neq c_m$ gilt: $c_0 \neq 0 \vee c_m \neq 0$, also $c_0^2 > 0 \vee c_m^2 > 0$, damit ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^2(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(x_{k+1}-x_k) \\
&= c_0^2(x_1-x_0) + c_m^2(x_{m+1}-x_m) + \sum_{k=1}^{m-1} c_k^2(x_{k+1}-x_k) \\
&\quad + \sum_{k=m+1}^{n-1} c_k^2(x_{k+1}-x_k) \\
&\ge c_0^2(x_1-x_0) + c_m^2(x_{m+1}-x_m) + 0 \\
&> 0
\end{aligned}$$

Man betrachte nun $\zeta := -\int_0^1 f(x)\,dx \in \mathbb{R}$. Mit f ist offenbar auch die Funktion

$$\begin{aligned}
g : [0,1] &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto f(x) + \zeta
\end{aligned}$$

eine nicht konstante Treppenfunktion, also $\int_0^1 g^2(x)\,dx > 0$, es folgt

$$\begin{aligned}
0 &< \int_0^1 g^2(x)\,dx \\
&= \int_0^1 (f(x)+\zeta)^2\,dx \\
&= \int_0^1 f^2(x) + 2\zeta f(x) + \zeta^2\,dx \\
&= \int_0^1 f^2(x)\,dx + 2\zeta \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 \zeta^2\,dx \\
&= \int_0^1 f^2(x)\,dx + 2\zeta \int_0^1 f(x)\,dx + \zeta^2 \\
&\overset{\text{Def von }\zeta}{=} \int_0^1 f^2(x)\,dx - 2\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \\
&= \int_0^1 f^2(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \\
\Longleftrightarrow \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 &< \int_0^1 f^2(x)\,dx
\end{aligned}$$

Mithin gilt für nicht fast konstantes f:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \neq \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

Das war aber zu zeigen.

Insgesamt ergibt sich:

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

gilt für $f \in \mathrm{Tr}[0,1]$ dann und nur dann, wenn f fast konstant ist.

6.1.7 Sei $g \in C\,[\,a,b\,]$. Falls g nichtnegativ ist und $\int_a^b g(t)\,dt = 0$ gilt, so ist $g = 0$.
Es sei also $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \geq 0$, weiterhin gelte $\int_a^b g(x)\;dx = 0$.
z.Z: $g \equiv 0$.
Bew.(durch Widerspruch):
Angenommen es wäre $g(\xi) > 0$ für ein $\xi \in [a,b]$. Aufgrund der Stetigkeit von g kann o.E. $\xi \in (a,b)$ angenommen werden. Da g stetig auf $[a,b]$ insbesondere in ξ ist, gilt

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in [a,b] : |\xi - x| \leq \delta \Rightarrow |g(\xi) - g(x)| \leq \varepsilon$$

Wähle nun $\delta_1 > 0$, so daß $|g(\xi) - g(x)| \leq \frac{f(\xi)}{2}$ für alle x mit $|x - \xi| \leq \delta_1$ und $\delta_2 > 0$, so daß $a \leq \xi - \delta_2 < \xi + \delta_2 \leq b$, z.B. $\delta_2 := \min\{|a - \xi|, |b - \xi|$.
Wähle nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Nun gilt einerseits $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a,b]$ und andererseits ist für alle $x \in [x - \delta, x + \delta]$

$$|f(x) - f(\xi)| \leq \frac{f(\xi)}{2} \Rightarrow f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2} > 0$$

Es folgt aus den Rechenregeln für Integrale und wegen $g \geq 0$ auf $[a,b]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\;dx &= \int_a^{\xi-\delta} g(x)\;dx + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} g(x)\;dx + \int_{\xi+\delta}^{b} g(x)\;dx \\
&\geq 0 + \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} \frac{f(\xi)}{2}\;dx + 0 \\
&= 2\delta \cdot \frac{f(\xi)}{2} \\
&= \delta \cdot f(\xi) > 0
\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\int_a^b g(x)\;dx = 0$. Also war die Annahme falsch, es gilt also $\nexists \xi \in [a,b] : g(\xi) > 0$.
Wegen $g \geq 0$ folgt $g \equiv 0$. Das war aber zu zeigen.

6.1.8 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Wir nehmen an, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)\,dt = 0$ für alle $\phi \in C\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist. Dann ist $f = 0$.
(Bemerkung: Der Träger einer stetigen Funktion ϕ ist als der Abschluss der Menge $\{t \mid \phi(t) \neq 0\}$ definiert.)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und für alle stetigen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger gelte $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\;dx = 0$.
z.Z: $f \equiv 0$.
Bew.:
Es sei $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig, man schließt nun durch Widerspruch $f(\xi) > 0$ und $f(\xi) < 0$ aus:

- Angenommen es wäre $f(\xi) > 0$
  Wähle aufgrund der Stetigkeit von f $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < \xi < b$ und $f(\xi) \geq 0$ f.a. $x \in [a,b]$. Betrachte die Funktion

  $$\begin{aligned}
  \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
  x &\mapsto \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{\xi-a} & a \leq x < \xi \\ \frac{b-x}{b-\xi} & \xi \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}
  \end{aligned}$$

  Zunächst gilt es zu bemerken, daß $\varphi \geq 0$ gilt, denn für $a \leq x < \xi$ ist $x - a \geq 0$ und $\xi - a \geq 0$, also $\varphi(x) \geq 0$, für $\xi \leq x < b$ ist $b - x \geq 0$ und $b - \xi \geq 0$ und damit auch $\varphi(x) \geq 0$ und für $x \notin (a,b)$ gilt offenbar $\varphi(x) = 0$.
  Weiterhin ist φ als Komposition dort stetiger Funktionen offenbar stetig auf $(-\infty, a)$, (a, ξ), (ξ, b) und (b, ∞), man zeigt nun, daß φ auch in a, b und ξ stetig ist:

Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(a-x) = 0 = \varphi(a) \text{ und } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(a+x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{a+x-a}{\xi-a} = 0 = \varphi(a)$$

Also ist φ auch in a stetig. In ξ gilt:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(\xi-x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\xi-x-a}{\xi-a} = 1 = \varphi(\xi)$$

und

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(\xi+x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b-\xi-x}{b-\xi} = 1 = \varphi(\xi)$$

und in b

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(b-x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{b-b+x}{b-\xi} = 0 = \varphi(b) \text{ und } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \varphi(b+x) = 0 = \varphi(b)$$

Mithin ist φ stetig auf $\mathbb{R}$, weiter gilt

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{(a,b)} = [a,b]$$

d.h. φ hat einen kompakten Träger.
Nach Voraussetzung folgt also:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$$

da $f(x)\varphi(x) = \varphi(x) = 0$ für $x \notin [a,b]$. Wegen $f|_{[}a,b] \geq 0$ und $\varphi|_{[a,b]} \geq 0$ gilt auch $f\varphi|_{[a,b]} \geq 0$, nach (a) folgt $f\varphi|_{[a,b]} \equiv 0$, insbesondere

$$f(\xi)\varphi(\xi) = 0 \iff f(\xi)\cdot 1 = 0 \iff f(\xi) = 0$$

Im Widerspruch zur Annahme, also kann $f(\xi) > 0$ nicht gelten.

- Angenommen es wäre $f(\xi) < 0$
  Dann wäre $(-f)(\xi) > 0$. Dies ist aber nicht möglich, da für jede stetige Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} (-f)(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = -0 = 0$$

  also hat $-f$ die gleiche Eigenschaft wie f, kann also, wie oben gezeigt, an der Stelle ξ keinen positiven Wert haben.

Da also weder $f(\xi) > 0$ noch $f(\xi) < 0$ möglich ist, folgt $f(\xi) = 0$.
Da $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig war, gilt $f \equiv 0$, das war aber zu zeigen.

6.1.9 Als wir das Wunschprogramm für eine Integrationstheorie zusammengestellt haben, wäre es doch auch sinnvoll gewesen zu fordern, dass die Integration *translationsinvariant* ist. Formaler: Ist $f \in \operatorname{Int}[\,a,b\,]$ und $g : [\,a+c, b+c\,] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x-c)$ definiert, so ist $g \in \operatorname{Int}[\,a+c,b+c\,]$ und es gilt

$$\int_{a+c}^{b+c} g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Man zeige, dass das für das Riemann-Integral richtig ist.
Es sei $f \in \operatorname{Int}[\,a,b\,]$, $g : [\,a+c,b+c\,] \to R$, $x \mapsto f(x-c)$. Wähle Treppenfunktionen $\tau_{-,n}, \tau_{+,n} \in \operatorname{Tr}[\,a,b\,]$ mit $\tau_{-,n} \leq f \leq \tau_{+,n}$ und

$$\int_a^b \tau_{+,n}(x) - \tau_{-,n}(x)\,dx. \leq \frac{1}{n}$$

Es sei etwa

$$\tau_{\pm,n}\big|_{]\,x_{i,n},x_{i+1,n}\,[} = c_i^{\pm,n}$$

Definiere nun $\sigma_{\pm,n} :]\, a+c, b+c\, [\to \mathbb{R}$ durch $\sigma_{\pm,n}(x) := \tau_{\pm,n}(x-c)$, dann sind $\sigma_{\pm,n}$ Treppenfunktionen wegen $\sigma_{\pm,n}|_{]\, x_{i,n}+c, x_{i+1,n}+c\, [} = c_i^{\pm,n}$ und es ist $\sigma_{-,n} \leq g \leq \sigma_{+,n}$ und

$$
\begin{aligned}
\int_{a+c}^{b+c} \sigma_{+,n}(x) - \sigma_{-,n}(x)\, dx &= \sum_{i=0}^{N_n-1} (c_i^{+,n} - c_i^{-,n})(x_{i+1,n} + c - x_{i,n} - c) \\
&= \sum_{i=0}^{N_n-1} (c_{i,n}^{+} - c_{i,n}^{-})(x_{i+1,n} - x_{i,n}) \\
&= \int_a^b \tau^{+,n}(x) - \tau_{-,n}(x)\, dx. \\
&\leq \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Also ist $g \in \mathrm{Int}\,[\, a+c, b+c\,]$.
Weiterhin ist aber nun

$$
\int_{a+c}^{b+c} g(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a+c}^{b+c} \sigma_{n,-}(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \tau_{n,-}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx
$$

und damit ist alles gezeigt.

Zu Abschnitt 6.2

6.2.1 Es sei $f \in C\,[\, a, b\,]$. Definiere $F : [\, a, b\,] \to \mathbb{R}$ durch

$$
F(x) := \int_x^b f(t)\, dt.
$$

Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und dass $F' = -f$ gilt.
Es ist für $x \in [a, b]$:

$$
F(x) = \int_x^b f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt
$$

also ist F als Summe differenzierbarer Funktionen differenzierbar und es ist

$$
F'(x) = 0 - f(x) = -f(x),
$$

was zu zeigen war.

6.2.2 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \frac{\ln(x)}{x}\, dx$	b) $\int \sin^2(x)\, dx$	c) $\int \arcsin(x)\, dx$
d) $\int \mathrm{e}^{ax} \sin(x)\, dx$	e) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$	f) $\int x^3 \cos(x)\, dx$
g) $\int \frac{x-1}{x^4+x^2}\, dx$	h) $\int \tan(x)\, dx$.	

Tipp zu (e): Verwenden Sie die Substitution $x = \sin(t)$.

a) Bestimmung von $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$
Es ist:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{x}\, dx &\overset{1)}{=} \int \frac{ux}{x}\, du \\
&= \int u\, du \\
&= \frac{u^2}{2} \\
&\overset{\text{Resubst. (1)}}{=} \frac{(\ln x)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Die Probe ergibt tatsächlich:

$$\begin{aligned}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]' &= \frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\\ &= \frac{\ln x}{x}\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

b) Bestimmung von $\int \sin^2(x)\,dx$
Man erhält durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)\,dx &\overset{2)}{=} -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx\\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int (1-\sin^2(x))\,dx\\ &= -\sin(x)\cos(x) + \int 1\,dx - \int \sin^2(x)\,dx\\ \iff 2\int \sin^2(x)\,dx &= x - \sin(x)\cos(x)\\ \iff \int \sin^2(x)\,dx &= \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}\end{aligned}$$

Die Probe ergibt:

$$\begin{aligned}\left[\frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}\right]' &= \frac{1}{2}\cdot\big(1-\cos^2(x)+\sin^2(x)\big)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2\sin^2(x)\\ &= \sin^2(x)\end{aligned}$$

Man erhält also:

$$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x-\sin(x)\cos(x)}{2}$$

c) Bestimmung von $\int \arcsin(x)\,dx$
Man erhält mit Hilfe von Substitution und part. Integration:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\,dx &\overset{3)}{=} \int \arcsin(\sin u)\cos u\,du\\ &= \int u\cos u\,du\\ &\overset{4)}{=} u\sin u - \int \sin u\,du\\ &= u\sin u + \cos u\\ &= u\sin u + \sqrt{1-\sin^2 u}\\ &\overset{\text{Resubst. (4)}}{=} x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}[x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}]' &= \arcsin(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)\\ &= \arcsin(x)\end{aligned}$$

---

1) **Subst.**: $u=\ln x$, $u'=\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$, also: $du=\frac{dx}{x}$
2) **part. Int.**: $f=\sin(x)$, $g'=\sin(x)$, also $f'=\cos(x)$, $g=-\cos(x)$
3) **Subst.**: $x=\sin u$, $x'=\frac{dx}{du}=\cos u$, also $dx=\cos u du$.
4) **part Int.**: $f=u$, $g'=\cos u$, also $f'=1$, $g=\sin u$.

Man hat also:

$$\int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

d) Bestimmung von $\int e^{ax}\sin(x)\,dx$

Durch zweifache Anwendung der partiellen Intergration ergibt sich im Falle $a \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\sin(x)\,dx &\overset{5)}{=} \frac{1}{a}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\cos x\,dx \\
&\overset{6)}{=} \frac{1}{a}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2}e^{ax}\cos(x) \\
&\qquad - \frac{1}{a^2}\int e^{ax}\sin x\,dx \\
\iff \left(1+\frac{1}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin(x)\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2}e^{ax}\cos(x) \\
\iff \frac{a^2+1}{a^2}\int e^{ax}\sin(x)\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2}e^{ax}\cos(x) \\
\iff \int e^{ax}\sin(x)\,dx &= \frac{a}{a^2+1}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2+1}e^{ax}\cos(x)
\end{aligned}$$

Die Probe ergibt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{a}{a^2+1}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2+1}e^{ax}\cos(x)\right]' &= \frac{a\cdot(ae^{ax}\sin(x) + e^{ax}\cos(x))}{a^2+1} \\
&\quad - \frac{ae^{ax}\cos(x) - e^{ax}\sin(x)}{a^2+1} \\
&= \frac{a^2e^{ax}\sin(x) + e^{ax}\sin(x)}{a^2+1} \\
&= e^{ax}\sin(x)
\end{aligned}$$

Im Fall $a = 0$ gilt:

$$\int e^{0x}\sin(x)\,dx = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

Also gilt insgesamt (also auch für $a = 0$)

$$\int e^{ax}\sin(x)\,dx = \frac{a}{a^2+1}e^{ax}\sin(x) - \frac{1}{a^2+1}e^{ax}\cos(x)$$

e) Bestimmung von $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Man erhält durch Substitution:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &\overset{7)}{=} \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot\cos(t)\,dt \\
&= \int \cos^2(t)\,dt \\
&= \int (1-\sin^2 t)\,dt \\
&= t - \int \sin^2 t\,dt \\
&\overset{(b)}{=} t - \frac{t-\sin(t)\cos(t)}{2} \\
&= \frac{t}{2} + \frac{\sin(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}}{2} \\
&\overset{\text{Resubst. (7)}}{=} \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)
\end{aligned}$$

---

[5] **part. Int.**: $f = \sin(x)$, $g' = e^{ax}$, also $f' = \cos(x)$, $g = \frac{1}{a}e^{ax}$.

[6] **part. Int.**: $f = \cos(x)$, $g' = e^{ax}$, also $f' = -\sin(x)$, $g = \frac{1}{a}e^{ax}$.

Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}\left(\arcsin(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)\right]' &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Mithin ist:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\arcsin(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$$

f) Bestimmung von $\int x^3\cos(x)\,dx$

Hier ist die partielle Integration dreimal anzuwenden:

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x)\,dx &\overset{8)}{=} x^3\sin(x)-3\int x^2\sin(x)\,dx\\ &\overset{9)}{=} x^3\sin(x)+3x^2\cos(x)-6\int x\cos(x)\,dx\\ &\overset{10)}{=} x^3\sin(x)+3x^2\cos(x)-6x\sin(x)+6\int\sin(x)\,dx\\ &= x^3\sin(x)+3x^2\cos(x)-6x\sin(x)-6\cos(x)\end{aligned}$$

Zur Probe:

$$\begin{aligned}\left[x^3\sin(x)+3x^2\cos(x)-6x\sin(x)-6\cos(x)\right]' &= x^3\cos(x)+3x^2\sin(x)\\ &\quad -3x^2\sin(x)+6x\cos(x)\\ &\quad -6x\cos(x)-6\sin(x)\\ &\quad +6\sin(x)\\ &= x^3\cos(x)\end{aligned}$$

Also ergibt sich letztendlich

$$\int x^3\cos(x)\,dx=x^3\sin(x)+3x^2\cos(x)-6x\sin(x)-6\cos(x)$$

g) Bestimmung von $\int\frac{x-1}{x^2+x^4}\,dx$

Dieses Integral bestimmt man durch Partialbruchzerlegung, dazu bestimmt man zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms:

$$\begin{aligned}x^2+x^4 &= 0\\ \Longleftrightarrow\ x^2(x^2+1) &= 0\\ \Longleftrightarrow\ x=0 &\ \vee\ x^2=-1\\ \Longleftrightarrow\ x=0 &\ \vee\ x=\pm i\end{aligned}$$

Man erhält also folgenden Ansatz für die Partialbruchzerlegung mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $a,\,b,\,c,\,d\in\mathbb{R}$:

$$\frac{x-1}{x^2+x^4}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Auf der rechten Seite ergibt sich duch Hauptnennerbildung:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{x^2+x^4} &= \frac{ax(x^2+1)+b(x^2+1)+x^2(cx+d)}{x^2(x^2+1)}\\ &= \frac{(a+c)x^3+(b+d)x^2+ax+b}{x^4+x^2}\end{aligned}$$

[7] **Subst.**: $x=\sin(t)$, $x'=\frac{dx}{dt}=\cos(t)$, also $dx=\cos t\,dt$.
[8] **part. Int.**: $f=x^3$, $g'=\cos(x)$, also $f'=3x^2$, $g=\sin(x)$.
[9] **part. Int.**: $f=x^2$, $g'=\sin(x)$, also $f'=2x$, $g=-\cos(x)$.
[10] **part. Int.**: $f=x$, $g'=\cos(x)$, also $f'=1$, $g=\sin(x)$.

Man erhält durch Koeffizientenvergleich:

$$a + c = 0, b + d = 0, a = 1, b = -1 \Rightarrow c = -1, d = 1$$

Man kann nun das gesuchte unbestimmte Integral bestimmen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x^4}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1-x}{x^2+1}\right)\,dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx \\
&= \ln|x| + \frac{1}{x} + \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\
&= \ln x + \frac{1}{x} + \arctan x - \frac{1}{2}\ln u \\
&\overset{\text{Resubst.}}{=} \ln|x| + \frac{1}{x} + \arctan x - \ln\sqrt{1+x^2} \\
&= \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x} + \arctan x
\end{aligned}$$

Die Probe ergibt:

$$\begin{aligned}
\left(\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} + \arctan x\right)' &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{x-(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} \\
&= \frac{x-1}{x^2+x^4}
\end{aligned}$$

Mithin ist:

$$\int \frac{x-1}{x^2+x^4}\,dx = \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x} + \arctan x$$

h) Bestimmung von $\int \tan(x)\,dx$
Man bestimmt dieses Integral durch Substituion:

$$\begin{aligned}
\int \tan(x)\,dx &\overset{11)}{=} \int \tan(\arctan u)\frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \int \frac{u}{1+u^2}\,du \\
&\overset{12)}{=} \int \frac{dv}{2v} \\
&= \frac{1}{2}\ln v \\
&\overset{\text{Resubst. (11)}}{=} \frac{1}{2}\ln(1+u^2) \\
&\overset{\text{Resubst. (12)}}{=} \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)
\end{aligned}$$

Die Probe ergibt:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x)\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot 2\tan x\cdot(1+\tan^2 x) \\
&= \tan x
\end{aligned}$$

11) **Subst.**: $x = \arctan u$, $x' = \frac{dx}{du} = \frac{1}{1+u^2}$, also $dx = \frac{du}{1+u^2}$.
12) **Subst.**: $v = 1+u^2$, $v' = \frac{dv}{du} = 2u$, also $dv = 2u\,du$.

Man erhält also:

$$\int \tan(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2 x) = \ln\sqrt{1+\tan^2 x}$$

6.2.3 Auf $]\,0,+\infty\,[$ definieren wir eine Funktion Log durch

$$\mathrm{Log}\,(x) := \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

(Für $x<1$ ist $\int_1^x(\cdots) := -\int_x^1(\cdots)$.)
Zeigen Sie direkt (d.h. ohne Verwendung der Logarithmusgesetze):

a) $\mathrm{Log}\,(x\cdot y) = \mathrm{Log}\,(x) + \mathrm{Log}\,(y)$

b) Log ist differenzierbar, streng monoton wachsend und

$$\frac{d\,\mathrm{Log}\,(x)}{dx} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in\,]\,0,+\infty\,[\,.$$

Weiter ist

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{Log}\,(x) = -\infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{x\to\infty} \mathrm{Log}\,(x) = +\infty.$$

Es existiert also eine differenzierbare Umkehrfunktion Exp $: \mathbb{R} \to\,]\,0,+\infty\,[$.

c) Die so definierte Funktion Exp erfüllt $\mathrm{Exp}\,(0)=1$ und $\mathrm{Exp}\,'(x) = \mathrm{Exp}\,(x)$.

a) Es seien $x,y\in]0,\infty[$ bel. dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Log}\,(x\cdot y) &= \int_1^{x\cdot y}\frac{dt}{t} \\
&= \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{x\cdot y}\frac{dt}{t} \\
&\overset{13)}{=} \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{d\tau}{\tau} \\
&= \mathrm{Log}\,(x) + \mathrm{Log}\,(y)
\end{aligned}$$

b) Man zeigt zunächst, daß Log diffenzierbar ist:
Es sei $x\in]0,\infty[$ beliebig, betrachte die Funktion:

$$\begin{aligned}
f : [\tfrac{x}{2}, 2x] &\to \mathbb{R} \\
\xi &\mapsto \int_{\frac{x}{2}}^{\xi}\frac{dt}{t}
\end{aligned}$$

Die Funktion f ist nach dem Hauptsatz der Differential und Intergralrechnung auf $[\frac{x}{2},2x]$ differenzierbar und es gilt $f'(\xi)=\frac{1}{\xi}$, weiterhin gilt aber für $\xi\in[\frac{x}{2},2x]$:

$$\begin{aligned}
f(\xi) &= \int_{\frac{x}{2}}^{\xi}\frac{dt}{t} \\
&= \int_{\frac{x}{2}}^{1}\frac{dt}{t} + \int_1^{\xi}\frac{dt}{t} \\
&= -\int_1^{\frac{x}{2}}\frac{dt}{t} + \int_1^{\xi}\frac{dt}{t} \\
&= -\mathrm{Log}\,(\tfrac{x}{2}) + \mathrm{Log}\,(\xi)
\end{aligned}$$

13) **Subst.**: $\tau = \frac{t}{x}$, $\tau' = \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{x}$, also $d\tau = \frac{dt}{x}$.

Mithin stimmt f auf dem Intervall $[\frac{x}{2}, 2x]$ mit Log bis auf eine Konstante überein, somit ist mit f auch Log auf $[\frac{x}{2}, 2x]$ eine Stammfunktion zu $\frac{1}{\xi}$, mithin ist Log auf $[\frac{x}{2}, 2x]$, insbesondere im Punkte $\xi = x$ differenzierbar und es gilt:

$$\mathrm{Log}'(x) = \frac{1}{x}$$

da $x \in]0, \infty[$ beliebig war, folgt:
Log ist auf $]0, \infty[$ differenzierbar, es gilt: $\mathrm{Log}'(x) = \frac{1}{x}$ f.a. $x \in]0, \infty[$.
Wegen

$$\forall x \in]0, \infty[: \mathrm{Log}'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

folgt unmittelbar: Log steigt streng monoton und die Ableitung $\frac{d\mathrm{Log}\,(x)}{dx}$ hat auf $]0, \infty[$ keine Nullstelle.

Man zeigt nun $\lim\limits_{\substack{x \to [\\ x \neq [}} \infty]\mathrm{Log}\,(x) = \infty$, z.Z. ist (wegen der Monotonie von Log reicht es zu zeigen, daß Log nach oben unbeschränkt ist:

$$\forall R > 0\ \exists x \in]0, \infty[: \mathrm{Log}\,(x) > R$$

Betrachte dazu zunächst zu $n \in \mathbb{N}$ die Funktion τ_n definiert durch

$$\begin{array}{rcl} \tau_n : [1, n] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{k+1} & x \in [k, k+1),\ k = 1, \ldots, n-1 \\ n & x = \frac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

Beh: Es ist $\forall x \in [1, n] : \tau_n(x) \leq \frac{1}{x}$.
Bew.: Es sei $x \in [1, n]$ beliebig, im Falle $x = n$ ist $\tau_n(x) = \frac{1}{n}$, ansonsten existiert ein $1 \leq k \leq n-1$, so daß $k \leq x < k+1$, es folgt $\frac{1}{x} > \frac{1}{k+1} = f(x)$. Das war zu zeigen.

Offenbar ist τ_n als Treppenfunktion über $[1, n]$ integrierbar, es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^n \tau_n(x)\ dx &= \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Da die harmonische Reihe unbeschränkt ist, ist auch $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \right)$ unbeschränkt.

Nun kann man zeigen, daß Log unbeschränkt ist:
Es sei $R > 0$ beliebig, wähle $n \in \mathbb{N}$, so daß $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} > R$ und $x := n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,(x) &= \mathrm{Log}\,(n) \\ &= \int_1^n \frac{dt}{t} \\ &\geq \int_1^n \tau_n(t)\ dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\ &> R \end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen, folglich gilt: $\lim\limits_{\substack{x \to [\\ x \neq [}} \infty]\mathrm{Log}\,(x) = \infty$.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{Log}(x) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_1^x \frac{dt}{t} \\
&= -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_x^1 \frac{dt}{t} \\
&\overset{14)}{=} -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{d\tau}{\tau} \\
&= -\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \operatorname{Log}(\tfrac{1}{x}) \\
&= -\lim_{\xi\to\infty} \operatorname{Log}(\xi) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

c) Man zeigt zunächst: $\operatorname{Exp}(0) = 1$.
Nach Definition von Log gilt:

$$\operatorname{Log}(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

da Exp und Log inverse Funktionen sind, folgt:

$$\operatorname{Exp}(0) = \operatorname{Exp}(\operatorname{Log}(1)) = 1$$

das war zu zeigen.
Es bleibt die Ableitung von Exp zu bestimmen, aufgrund von (b) und der Umkehrregel gilt mit bel. $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Exp}'(x) &= \frac{1}{\operatorname{Log}'(\operatorname{Exp}(x))} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{Exp}(x)}} \\
&= \operatorname{Exp}(x)
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.
Somit gilt aufgrund der Eindeutigkeit der Exponentialfunktion Exp $=$ exp und da auch Umkehrfunktionen eindeutig bestimmt sind: Log $=$ ln.

6.2.4 Man definiere $a_m := \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Zeigen Sie, dass die Rekursionsgleichung

$$a_{m+2} = \frac{m+1}{m+2} a_m$$

gilt. Das soll mit der (ebenfalls zu beweisenden) Ungleichung

$$1 \le \frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \le \frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}} \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}$$

kombiniert werden, um die folgende Formel (das *Wallis-Produkt*) herzuleiten:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{(2m)^2(2m-2)^2 \cdots 2^2}{(2m-1)^2(2m-3)^2 \cdots 1^2}.$$

[14] **Subst.**: $\tau = \frac{t}{x}$, $\tau' = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{x}$, also $dt = \frac{d\tau}{x}$.

a) Es sei $m \geq 0$, also $m + 2 \geq 2$, man erhält durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
a_{m+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2}(x)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+1}(x) \cdot \sin(x)\, dx \\
&\overset{\text{footnotemark}}{=} \sin^{m+1}(x) \cdot (-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m+1)\sin^m(x) \cdot \cos(x) \cdot (-\cos x)\, dx \\
&\overset{m \geq 0}{=} 0 + (m+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x) \cdot \cos^2(x)\, dx \\
&= (m+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x) \cdot (1 - \sin^2 x)\, dx \\
&= (m+1) \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m+2}(x)\, dx\right] \\
&= (m+1) \cdot (a_m - a_{m+2}) \\
&= (m+1)a_m - (m+1)a_{m+2} \\
\Rightarrow (m+2)a_{m+2} &= (m+1)a_m \\
\iff a_{m+2} &= \frac{m+1}{m+2} a_m
\end{aligned}$$

Dies war aber zu zeigen.

b) Es sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Um die obige Ungleichung zu beweisen zeigt man zunächst, daß gilt

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : 0 \leq \sin^{2m+1} x \leq \sin^{2m} x \leq \sin^{2m-1} x$$

Sei also $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ beliebig, dann gilt $0 \leq \sin x \leq 1$, es folgt

$$0 \leq \sin^2 x \leq \sin x \leq 1$$

Wegen $0 \leq \sin x$ gilt aufgrund der Monotonie der Potenzfunktionen für positive Exponenten auch $0 \leq \sin^{2m-1}$, damit folgt

$$0 \leq \sin^{2m+1} x \leq \sin^{2m} x \leq \sin^{2m-1} x$$

Aufgrund der Positivität und Monotonie des Integrals folgt hieraus

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\, dx \\
\iff 0 &\leq a_{2m+1} \leq a_{2m} \leq a_{2m-1}
\end{aligned}$$

Nun gilt aber, wie oben gezeigt $0 \leq \sin^{2m+1} x$ für bel. $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, weiterhin aber ist

$$\sin^{2m+1}(\frac{\pi}{2}) = 1^{2m+1} = 1 > 0$$

und aus der Stetigkeit von $\sin^{2m+1} x$ auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ folgt damit, wie in der letzten Übung gezeigt, $a_{2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\, dx > 0$, damit folgt aus obiger Ungleichung

$$\begin{aligned}
& a_{2m+1} \leq a_{2m} \leq a_{2m-1} \\
\overset{a_{2m+1} > 0}{\iff} \quad & 1 \leq \frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \leq \frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}}
\end{aligned}$$

Das war aber die behauptete Ungleichung.
Als nächstes zeigt man durch vollständige Induktion, daß

$$\forall m \in \mathbb{N} : a_{2m-1} = \prod_{\mu=1}^{m-1} \frac{2\mu}{2\mu+1}, \quad a_{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu - 1}{2\mu}$$

[14] **part. Int.:** $f = \sin^{m+1} x$, $g' = \sin x$, also $f' = (m+1)\sin^m(x)\cos x$, $g = -\cos x$.

- Induktionsanfang: $m = 1$
  Es gilt

$$\begin{aligned}
a_{2m-1} &= a_1 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\
&= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos 0 \\
&= -0 + 1 \\
&= 1 \\
a_{2m} &= a_2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \\
&\overset{8.\text{Übung}}{=} \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{\pi}{2} - 1 \cdot 0 - 0 + 0 \cdot 1\Big) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

  Wegen

$$\prod_{\mu=1}^{0} \frac{2\mu}{2\mu+1} = 1, \quad \prod_{\mu=1}^{1} \frac{2\mu-1}{2\mu} = \frac{1}{2}$$

  war das gerade die Behauptung für $m = 1$.

- Induktionsvoraussetzung:
  Für ein festes, aber beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gelte:

$$a_{2m-1} = \prod_{\mu=1}^{m-1} \frac{2\mu}{2\mu+1}, \quad a_{2m} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu-1}{2\mu}$$

- Induktionsschluß:
  Zu zeigen ist:

$$a_{2m+1} = \prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu}{2\mu+1}, \quad a_{2m+2} = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m+1} \frac{2\mu-1}{2\mu}$$

  Es gilt aber aufgrund der unter (a) bewiesenen Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
a_{2m+1} &= \frac{2m}{2m+1} a_{2m-1} \\
&\overset{\text{Ind. Vor.}}{=} \frac{2m}{2m+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m-1} \frac{2\mu}{2\mu+1} \\
&= \prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu}{2\mu+1} \\
a_{2m+2} &= \frac{2m+1}{2m+2} a_{2m} \\
&\overset{\text{Ind.Vor.}}{=} \frac{2m+1}{2m+2} \prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu-1}{2\mu} \\
&= \prod_{\mu=1}^{m+1} \frac{2\mu-1}{2\mu}
\end{aligned}$$

  Das war aber gerade die Behauptung.

Aus obiger Ungleichung folgt damit für bel. $m \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
& 1 \le \frac{a_{2m}}{a_{2m+1}} \le \frac{a_{2m-1}}{a_{2m+1}} \\
\Longleftrightarrow \quad & 1 \le \frac{\frac{\pi}{2} \cdot \prod\limits_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu-1}{2\mu}}{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu}{2\mu+1}} \le \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m-1} \frac{2\mu}{2\mu+1}}{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu}{2\mu+1}} \\
\Longleftrightarrow \quad & 1 \le \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu)^2} \le \frac{2m+1}{2m} \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \le \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu)^2} - 1 \le \frac{2m+1}{2m} - 1
\end{aligned}
$$

Betrachte nun die Folge $\left(\frac{2m+1}{2m} - 1\right)_n \in \mathbb{N}$, offenbar gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{2m+1}{2m} - 1\right) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2m} = 0$$

Aufgrund des Majorantenkriteriums ist damit auch

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu)^2} - 1\right) = 0$$

Anwendung der Grenzwertsätze ergibt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu)^2} - 1\right) &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{m\to\infty} \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu-1)(2\mu+1)}{(2\mu)^2} &= 1 \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\prod\limits_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu)^2}{(2\mu-1)(2\mu+1)}} &= 1 \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty} \prod\limits_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu)^2}{(2\mu-1)(2\mu+1)}} &= 1 \\
\Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu)^2}{(2\mu-1)(2\mu+1)} &= \frac{\pi}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu}{2\mu-1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{2\mu}{2\mu+1}\right) &= \frac{\pi}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{\mu=1}^{m} (2\mu)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\mu-1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m-1} \frac{1}{2\mu+1}\right) &= \frac{\pi}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{\mu=1}^{m} (2\mu)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\mu-1} \cdot \prod_{\mu=2}^{m} \frac{1}{2\mu-1}\right) &= \frac{\pi}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{\mu=1}^{m} (2\mu)^2 \cdot \frac{1}{2m+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\mu-1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{1}{2\mu-1}\right) &= \frac{\pi}{2} \\
\Longleftrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2m+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu)^2}{(2\mu-1)^2}\right) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{\mu=1}^{\infty} \frac{4\mu^2}{4\mu^2-1} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{2m+1} \cdot \prod_{\mu=1}^{m} \frac{(2\mu)^2}{(2\mu-1)^2}\right)$$

Das war aber zu zeigen.

6.2.5 Gewinnen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\arctan(x)$ und $\log(1+x)$. Dazu soll $\frac{1}{1+x^2}$ bzw. $\frac{1}{1+x}$ als Summe einer geometrischen Reihe aufgefasst und gliedweise integriert werden. Begründen Sie die Korrektheit dieser Vorgehensweise.
Man zeigt zunächst folgendes:
Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$, und

$$\begin{aligned} f : (-R, R) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

die durch sie darstellte Funktion, so ist die durch formale gliedweise Integration entstehende Funktion

$$\begin{aligned} F : (-R, R) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

auf $(-R, R)$ eine Stammfunktion von f.
Man zeigt zunächst, daß mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ den Konvergenzradius $R > 0$ hat. Der Konvergenzradius der letzteren Reihe sei vorläufig mit $0 \le R^* \le \infty$ bezeichnet, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^*} &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{a_n}{n+1}\right|} \\ &= \frac{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \frac{1}{R} \\ \iff R^* &= R \end{aligned}$$

also hat auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ den Konvergenzradius R. Die Funktion F ist also tatsächlich für $x \in (-R, R)$ erklärt. Weiterhin gilt, da Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises gliedweise differenziert werden dürfen, für bel. $x \in (-R, R)$:

$$F'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

Somit ist F auf $(-R, R)$ eine Stammfunktion zu f.
Das wollte man aber zeigen.
Nun kann man speziell die beiden gegebenen Funktionen betrachten:

- Die Funktion $f : x \mapsto \arctan x$:
  Die Funktion f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Für $x \in (-1, 1)$ ist

$|x|^2 \leq |x| < 1$ und damit gilt (geometrische Reihe):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1-(-x^2)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \end{aligned}$$

Aufgrund obiger Überlegungen ist nun die durch

$$\begin{aligned} F : (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

gegebene Funktion F auf $(-1,1)$ eine Stammfunktion zu f'. Da auch f eine Stammfunktion zu f' ist und sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden gilt

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in (-1,1) : F(x) - f(x) = c$$

Man erhält durch einsetzen von $x = 0$:

$$\begin{aligned} c &= F(0) - f(0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{2n+1} - \arctan 0 \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\forall x \in (-1,1) : f(x) = \arctan x = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Dies ist aber die geforderte Potenzreihendarstellung von $\arctan x$.

- Die Funktion $g : x \mapsto \log(1+x)$.

  g ist auf ganz $(-1,\infty)$ differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Für $x \in (-1,1)$ ist $|x| < 1$ und damit gilt (geometrische Reihe):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

Aufgrund obiger Überlegungen ist nun die durch

$$\begin{aligned} G : (-1,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

gegebene Funktion G auf $(-1,1)$ eine Stammfunktion zu g'. Da auch g eine Stammfunktion zu g' ist und sich zwei Stammfunktionen nur um eine Konstante unterscheiden gilt

$$\exists d \in \mathbb{R}\ \forall x \in (-1,1) : G(x) - g(x) = d$$

Man erhält durch einsetzen von $x = 0$:

$$\begin{aligned} c &= G(0) - g(0) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} - \log 1 \\ &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\forall x \in (-1,1) : g(x) = \log(1+x) = G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Dies ist aber die geforderte Potenzreihendarstellung von $\log(1+x)$.

Zu Abschnitt 6.3

6.3.1 Berechnen Sie $\int_{\pi}^{2\pi} (2x+i)\sin(x)\,dx$.
Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} (2x+i)\sin x\,dx &= 2\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x\,dx + i\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx \\ &= 2\left([-x\cos x]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\,dx\right) + i[-\cos x]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 2\big(-2\pi - \pi + [\sin x]_{\pi}^{2\pi}\big) + i(1+1) \\ &= -6\pi + 2i. \end{aligned}$$

6.3.2 Existiert $\int_1^{\infty} \frac{2}{\log x}\,dx$?
Nein. Denn für $x \geq 1$ ist $\log x \leq x$, also wäre

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x}\,dx \leq \int_1^{\infty} \frac{2}{\log x}\,dx < \infty,$$

was falsch ist.
Also ist $\int_1^{\infty} \frac{2}{\log x}\,dx = \infty$.

6.3.3 Zeigen Sie:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ existiert.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ existiert nicht.

a) Um zu zeigen, daß $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ exisiert, muß man zeigen, daß sowohl $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ als auch $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ existieren:

- Existenz des Intergrals $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.
  Es sei $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ eine Folge in $(0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, o.E. sei x_n monoton fallend, zu zeigen ist, daß die Folge der Integrale $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ mit

  $$I_n := \int_{x_n}^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

  konverigert. Man zeigt dies, indem man zeigt, daß $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist:
  Man zeigt zunächst die Beschränktheit: Aufgrund der Regel von de l'Hôpital gilt:

  $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos x 1 = 1$$

Wähle also $\varepsilon > 0$ so, daß $\varepsilon < 1$ und $\frac{\sin x}{x} < 2$ für $x \in (0, \varepsilon)$. Sei $x \in (0,1]$ beliebig, dann gilt:

Im Fall $0 < \varepsilon < x$ ist $\frac{\sin x}{x} < 2$ nach Wahl von ε.
Gilt $\varepsilon \leq x \leq 1$, so ergibt sich

$$\frac{\sin x}{x} \leq \frac{\sin x}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Die Abbildung $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ ist also auf $(0,1]$ durch $M := \max\{2, \frac{1}{\varepsilon}\}$ nach oben beschränkt. Weiterhin ist $\frac{\sin x}{x}$ für alle $x \in (0,1]$ positiv, also nach unten durch 0 beschränkt. Nun kann man die Beschränktheit der Folge $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ zeigen: Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} |I_n| &= \left| \int_{x_n}^1 \frac{\sin x}{x} \, dx \right| \\ &= \int_{x_n}^1 \frac{\sin x}{x} \, dx \\ &\leq \int_{x_n}^1 M \, dx \\ &= (1 - x_n) \cdot M \\ &\leq M \end{aligned}$$

$(I_n)_n \in \mathbb{N}$ ist also nach oben beschränkt, es bleibt zu zeigen, daß $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ auch monoton wächst:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, zu zeigen: $I_{n+1} \geq I_n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_{x_{n+1}}^1 \frac{\sin x}{x} \, dx \\ &= \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{\sin x}{x} \, dx + \int_{x_n}^1 \frac{\sin x}{x} \, dx \\ &\overset{x_{n+1} \leq x_n}{\geq} 0 + I_n = I_n \end{aligned}$$

Somit ist $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, mithin also konvergent, damit existiert $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \, dx$. Das wollte man aber zeigen.

- Existenz von $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx$.
  Zu zeigen ist, daß der Grenzwert

  $$\lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x} \, dx$$

  existiert.
  Es sei $M > 1$ beliebig, dann gilt

  $$\begin{aligned} \int_1^M \frac{\sin x}{x} \, dx &\overset{15)}{=} -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^M - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} \, dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos x}{x^2} \, dx \end{aligned}$$

  Man betrachte nun zunächst $\lim\limits_{M \to \infty} \frac{\cos M}{M}$, es gilt für bel. $M \in [1, \infty)$:

  $$\left| \frac{\cos M}{M} \right| \leq \frac{1}{M}$$

[15] **part. Int.:** $f' = \sin x, g = \frac{1}{x}$, also $f = -\cos x, g' = -\frac{1}{x^2}$.

wegen $\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} = 0$ folgt hieraus

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\cos M}{M} = 0$$

Nun betrachtet man das Integral $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\ dx$ für $x \in [1,\infty)$ gilt offenbar

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

somit existiert, da $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$, wie in der Vorlesung bewiesen, existiert, auch $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\ dx$.
Die Anwendung der Grenzwertsätze ergibt:

$$\begin{aligned}
\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x}\ dx &\overset{\text{GWS}}{=} \cos 1 - \lim_{M\to\infty} \frac{\cos M}{M} - \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\cos x}{x^2}\ dx \\
&= \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\ dx
\end{aligned}$$

Da wie oben gezeigt, $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\ dx$ existiert, durften die Grenzwertsätze angewandt werden, der Grenzwert

$$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{\sin x}{x}\ dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx$$

existiert also.
Das war aber zu zeigen.

Da beide uneigentlichen Integrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\ dx$ und $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx$ existieren, existiert auch

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\ dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\ dx$$

Dies sollte gezeigt werden.

b) Offenbar reicht es zu zeigen, daß $\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x}\ dx$ nicht existiert, man zeigt dies, indem man zeigt, daß die Folge $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : I_n := \int_\pi^{(n+1)\cdot\pi} \frac{|\sin x|}{x}$$

unbeschränkt und damit divergent ist.
Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_\pi^{(n+1)\cdot\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\ dx \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\ dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \cdot \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\ dx \\
&\overset{\text{Periodizität}}{=} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \cdot \int_0^\pi |\sin x|\ dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \cdot (-\cos x)\Big|^\pi \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \cdot 2 \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Da die Folge $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right)_n \in \mathbb{N}$ als Partialsummenfolge der harmonischen Reihe unbeschränkt ist, ist aufgrund obiger Abschätzung auch die Folge $(I_n)_n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt und damit divergent.
Also existiert $\int_\pi^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ und damit $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ nicht.
Dies war zu zeigen.

6.3.4 Zeigen Sie, dass die Gammafunktion konvex ist.
Man zeigt zunächst, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha > -1$ die Funktion

$$\begin{aligned} f_n : (0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\ln x)^n x^\alpha \end{aligned}$$

über $(0,1]$ uneigentlich inegrierbar ist:

- Induktionsverankerung: $n = 1$
  Man beachte zunächst, daß für $\beta > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \cdot \ln x &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{x^{-\beta}} \\ &\overset{\text{l'Hôpital}}{=} -\frac{1}{\beta} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{-1}}{x^{-(\beta+1)}} \\ &= -\frac{1}{\beta} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \\ &\overset{\beta \geq 0}{=} 0 \end{aligned}$$

  Man erhält nun durch partielle Inegration für bel. $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 x^\alpha \ln x\, dx \\ &\overset{16)}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x \Big| - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\alpha+1} x^\alpha\, dx \right) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} 0 - \frac{1}{\alpha+1} \int_0^1 x^\alpha\, dx \end{aligned}$$

  Dieses Integral existiert aber, damit existiert auch $\int_0^1 x^\alpha \ln x\, dx$.
  Das war aber zu zeigen.

- Indunktionsvoraussetzung:
  Für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\forall \beta > 0 : \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \cdot (\ln x)^n = 0$$

  und $\int_0^1 \ln x x^\alpha\, dx$ existiert für $\alpha > -1$.

- Induktionsschluß:
  Es gilt für $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \cdot (\ln x)^{n+1} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^{-\beta}} \\ &\overset{\text{l'Hôpital}}{=} -\frac{n+1}{\beta} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^{-1} \cdot (\ln x)^n}{x^{-(\beta+1)}} \\ &= \frac{n+1}{\beta} \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^n x^\beta \\ &\overset{\text{Ind. Vor.}}{=} 0 \end{aligned}$$

16) **part. Int.:** $f = \ln x, g' = x^\alpha$, also $f' = \frac{1}{x}, g = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

Weiterhin erhält man durch partielle Integration für $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^{n+1}\, dx &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 x^\alpha (\ln x)^{n+1}\, dx \\
&\overset{17)}{=} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\ln x)^{n+1} \Big| - \int_\varepsilon^1 \frac{n+1}{\alpha+1} x^\alpha (\ln x)^n\, dx \right) \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} 0 - \frac{n+1}{\alpha+1} \int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n\, dx
\end{aligned}$$

Dieses Integral existiert nach Ind. Vor., also auch $\int_0^1 (\ln x)^{n+1} x^\alpha\, dx$.
Das war aber zu zeigen.

Nun kann man zeigen, daß Γ konvex ist:
Eine Funktion $f : (0,\infty)$ ist konvex, wenn sie zweimal differenzierbar ist und wenn

$$\forall t \in (0,\infty) : f''(t) \geq 0$$

Man zeigt also zunächst, daß die Gammafunktion $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{t-1}\, dx$$

zweimal differenzierbar ist.
Dazu betrachtet man zunächst die Abbildung

$$\begin{aligned}
f : (0,\infty)^2 &\to \mathbb{R} \\
(t,x) &\mapsto \mathrm{e}^{-x} x^{t-1}
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß Γ differenzierbar ist, muß man zunächst zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ existiert und stetig ist. Als Kompostium nach t partiell differenzierbarer Funktionen ist sie partiell nach t diff'bar und es ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{e}^{-x} x^{t-1} \\
&= \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \cdot \ln x
\end{aligned}$$

Als Kompositum stetiger Funktionen ist $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ auf $(0,\infty)^2$ stetig.
Es sei $t_0 \in (0,\infty)$ beliebig. Zu zeigen ist, daß es ein $\varepsilon > 0$ (mit $\varepsilon < t_0$) und eine über $(0,\infty)$ uneigentlich integrierbare Funktion $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\ \forall x \in (0,\infty) : \left| \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) \right| \leq h(x)$$

Wähle $\varepsilon := \frac{t_0}{2}$ (dann ist $t_0 - \varepsilon > 0$).
Man zeigt zunächst, daß es eine über $(0,1]$ uneigentlich Integrierbare Majorante für $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gibt:
Für $x \in (0,1]$ und $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial t} f(t,x) \right| &= \left| \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \right| \\
&= |\ln x| \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \\
&\leq -\ln x \cdot x^{t-1} \\
&\leq -\ln x \cdot x^{t_0-\varepsilon-1}
\end{aligned}$$

und $-\ln x \cdot x^{t_0-\varepsilon-1}$ ist (s.o.) über $(0,1]$ integrierbar.

[17)] **part. Int.:** $f = (\ln x)^{n+1}, g' = x^\alpha$, also $f' = \frac{1}{x} \cdot (n+1) \cdot (\ln x)^n, g = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

Für $x \in [1,\infty)$ und $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gilt zunächst $\ln x \leq x$ (folgt aus $\mathrm{e}^x \geq x$) und damit:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| &= |\ln x| \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \\ &\leq x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \\ &= x^t \cdot \mathrm{e}^{-x} \\ &\leq x^{t_0+\varepsilon} \cdot \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

und $x^{t_0+\varepsilon} \cdot \mathrm{e}^{-x}$ ist wegen $t_0+\varepsilon > 0$ über $[1,\infty)$ integrierbar (denn das Integral über $\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}$ existiert für alle $t > 1$).
Also ist Γ in t_0 differenzierbar, da t_0 beliebig war, somit auf $(0,\infty)$ und es gilt:

$$\Gamma'(t) = \int_0^\infty \ln\ x \cdot x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Man zeigt nun, daß auch Γ' differenzierbar ist:
Man muß zunächst zeigen, daß $\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x)$ existiert und stetig ist. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t} \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x} x^{t-1} \\ &= \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \cdot (\ln x)^2 \end{aligned}$$

Als Kompositum stetiger Funktionen ist $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ auf $(0,\infty)^2$ stetig.
Es sei $t_0 \in (0,\infty)$ beliebig. Zu zeigen ist, daß es ein $\varepsilon > 0$ (mit $\varepsilon < t_0$) und eine über $(0,\infty)$ uneigentlich integrierbare Funktion $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\forall t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\ \forall x \in (0,\infty) : \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(t,x)\right| \leq h(x)$$

Wähle $\varepsilon := \frac{t_0}{2}$ (dann ist $t_0 - \varepsilon > 0$).
Man zeigt zunächst, daß es eine über $(0,1]$ uneigentlich Integrierbare Majorante für $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gibt:
Für $x \in (0,1]$ und $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| &= \left|(\ln x)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1}\right| \\ &= (\ln x)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \\ &\leq (\ln x)^2 \cdot x^{t_0-\varepsilon-1} \end{aligned}$$

und $(\ln x)^2 \cdot x^{t_0-\varepsilon-1}$ ist (s.o.) über $(0,1]$ integrierbar.
Für $x \in [1,\infty)$ und $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gilt zunächst $\ln x \leq x$ und damit wegen der Monotonie der Quadratfunktion:

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| &= (\ln x)^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \\ &\leq x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot x^{t-1} \\ &= x^{t+1} \cdot \mathrm{e}^{-x} \\ &\leq x^{1+t_0+\varepsilon} \cdot \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

und $x^{1+t_0+\varepsilon} \cdot \mathrm{e}^{-x}$ ist wegen $t_0+\varepsilon > 0$ über $[1,\infty)$ integrierbar (denn das Integral über $\mathrm{e}^{-x}x^{t-1}$ existiert für alle $t > 1$).
Also ist Γ in t_0 differenzierbar, da t_0 beliebig war, somit auf $(0,\infty)$ und es gilt:

$$\Gamma''(t) = \int_0^\infty (\ \ln x)^2 \cdot x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

Nun gilt für alle $x \in (0,\infty), t \in (0,\infty)$:

$$(\ln x)^2 \cdot x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} \geq 0$$

und somit aufgrund der Positivität des uneigentlichen Integrals (wie im Tutorium gezeigt) auch:

$$\Gamma''(t) = \int_0^\infty (\ln x)^2 \cdot x^{t-1} \cdot \mathrm{e}^{-x}\, dx \geq 0$$

Damit ist Γ auf ganz $\mathbb{R}^+$ konvex.
Das war aber zu zeigen.

Zu Abschnitt 6.4

6.4.1 Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $g(x) = \int_0^5 \cos(x^2 t^4)\, dt$,

b) $g(x) = \int_{-x}^{\mathrm{e}^x} \sqrt{1 + t^2 x^2}\, dt$.

a) Es ist:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^5 \frac{\partial}{\partial x} \cos(x^2 t^4)\, dt \\ &= -\int_0^5 2xt^4 \sin(x^2 t^4)\, dt \end{aligned}$$

b) Es ist nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-x}^{\mathrm{e}^x} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{1+t^2x^2}\, dt + \left(\frac{d}{dx}(-x)\right)\sqrt{1+x^4} - \left(\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x\right)\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2x}} \\ &= \int_{-x}^{\mathrm{e}^x} \frac{2xt^2}{2\sqrt{1+t^2x^2}}\, dt - \sqrt{1+x^4} + \mathrm{e}^x\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}. \end{aligned}$$

6.4.2 Zeigen Sie durch Berechnung der Ableitung, dass die durch

$$g(x) = \int_0^5 (1 + x^3 t^4)^2\, dt$$

definierte Funktion auf $[\,0, 1\,]$ monoton steigend ist.
Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^5 2(1 + x^3t^4) \cdot 3x^2t^4\, dt \\ &= \int_0^5 !(6x^2t^4 + 6x^5t^8)\, dt \end{aligned}$$

Nun ist aber für $x \in [0, 1]$ und $t \in [0, 5]$ sicher $6x^2t^4 + 6x^5t^8 \geq 0$, also $g'(x) \geq 0$, was die Monotonie von g zeigt.

6.4.3 Bestimmen Sie die Ableitung von $g(x) = \int_0^{+\infty} \cos(x^2t^4)\mathrm{e}^{-2t}\, dt$ auf $\mathbb{R}$.
Zunächst ist g wegen

$$\left|\cos(x^2t^4)\mathrm{e}^{-2t}\right| \leq \mathrm{e}^{-2t}$$

sowie

$$\left|2xt^4 \sin(x^2t^4)\mathrm{e}^{-2t}\right| \leq 2xt^4\mathrm{e}^{-2t}$$

und $\int_0^\infty t^n \mathrm{e}^{-2t}\, dt < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar, weiter folgt dann

$$g'(x) = -\int_0^\infty 2xt^4 \sin(x^2t^4)\mathrm{e}^{-2t}\, dt$$

Zu Abschnitt 6.5

6.5.1 Sei $f(x) = x$ für $x \in [\,0, 1\,]$. Berechnen Sie die L^p-Normen für $p \in [\,1, +\infty\,]$.
Es zeigt sich, dass $\|f\|_p$ für $p \to \infty$ gegen $\|f\|_\infty$ geht. Beweisen Sie, dass das für alle Intervalle $[\,a, b\,]$ und alle $f \in C\,[\,a, b\,]$ richtig ist.

Es ist für $p < \infty$ zunächst

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int_0^1 x^p ; dx.\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} \\ &= (p+1)^{-1/p} \end{aligned}$$

und weiter

$$\|p\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |x| = 1.$$

Sei nun $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist zunächst für $1 \leq p < q < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \||f|^p\|_1{}^{1/p} \\ &= \||f|^p \mathbf{1}\|_1{}^{1/p} \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \||f|^p\|_{q/p}{}^{1/p} \|\mathbf{1}\|_{q/(q-p)}{}^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 |f|^{p \cdot q/p}\, dx\right)^{1/p \cdot p/q} \cdot \left(\int_0^1 1\, dx\right)^{1/p \cdot (q-p)/q} \\ &= \|f\|_q \end{aligned}$$

also ist $p \mapsto \|f\|_p$ monoton. Weiterhin ist für $1 \leq p < \infty$:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\, dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 \|f\|_\infty{}^p\right)^{1/p} = \|f\|_\infty$$

d.h. $p \mapsto \|f\|_p$ ist beschränkt.
Also existiert $\eta := \lim_{p \to \infty} \|f\|_p$ und es ist $\eta \leq \|f\|_\infty$. Es bleibt also $\|f\|_\infty \leq \eta$ zu zeigen: Dazu sei $x_0 \in [0,1]$ mit $|f(x_0)| = \|\infty\|_f$. .. hm ..

6.5.2 Für $f \in C[0,1]$ und $p \in [1, +\infty[$ gilt $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty$. Für welche f gilt sogar $\|f\|_p = \|f\|_\infty$?
Man hat nach der Hölderschen Ungleichung, dass:

$$\|f\|_p = \|\mathbf{1} f\|_p \leq \|\mathbf{1}\|_p \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

wegen

$$\|\mathbf{1}\|_p{}^p = \int_0^1 1^p\, dx = 1.$$

Gleichheit gilt hier, wenn f und $\mathbf{1}$ linear abhängig sind, d.h. falls $f = \lambda \mathbf{1}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Anderenfalls gibt es nämlich $x_0 \in]0,1[$ und $\varepsilon, \delta > 0$, so dass

$$|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty{}^p - \delta, \quad x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

es folgt

$$\begin{aligned} \|f\|_p{}^p &= \int_0^1 |f|^p\, dx \\ &\leq \int_0^{x_0 - \varepsilon} \|f\|_\infty{}^p\, dx + \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \|f\|_\infty{}^p - \delta\, dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^1 \|f\|_\infty{}^p\, dx \\ &= \|f\|_\infty{}^p - 2\varepsilon\delta \\ &< \|f\|_\infty{}^p. \end{aligned}$$

6.5.3 Setzen Sie in der Hölderschen Ungleichung $f = g$ und finden Sie so eine Beziehung zwischen den Normen $\|f\|_2$, $\|f\|_p$ und $\|f\|_q$.
Es ist

$$\|f\|_2{}^2 = \left\||f|^2\right\|_1 = \left\|f^2\right\|_1 \leq \|f\|_p \|f\|_q.$$

Zu Abschnitt 6.6

6.6.1 Sei K ein Körper mit Differentiation. Zeigen Sie, dass die Menge der Konstanten einen Unterkörper bildet.
Es sei $k := \{x \in K \mid x' = 0\}$ die Menge der Konstanten.
Zunächst sind $0, 1 \in k$, denn:

$$0' = (0+0)' = 0' + 0' \iff 0' = 0$$

und (im Falle $1 + 1 \neq 0$) ist:

$$1' = (1 \cdot 1)' = 1' \cdot 1 + 1 \cdot 1' = (1+1) \cdot 1' \iff 1' = 0$$

(falls $1 + 1 = 0$ ist, gilt $1' = (1 + 1) \cdot 1' = 0$).
Mit $x, y \in k$ ist $x + y, xy \in k$, denn:

$$(x+y)' = x' + y' = 0 + 0 = 0$$

und

$$(xy)' = x'y + xy' = 0y + 0x = 0.$$

Mit $x \in k$ ist $-x \in k$, denn:

$$0 = 0' = (-x + x)' = (-x)' + x' = (-x)'$$

und für $x \in k, x \neq 0$ ist $x^{-1} \in k$, denn:

$$0 = 1' = (xx^{-1})' = x'x^{-1} + x(x^{-1})' = x(x^{-1})' \iff (x^{-1})' = 0$$

also ist k ein Unterkörper.

6.6.2 Beweisen Sie, dass $\sqrt[3]{x+1} - x$ algebraisch über K_{rat} ist.
Es sei

$$f(t) := t^3 + 3xt^2 + 3x^2t - (x + 1 - x^3) \in K_{\text{rat}}[t]$$

dann ist mit $\alpha := \sqrt[3]{x+1}$:

$$\begin{aligned} f\big(\sqrt[3]{x+1} - x\big) & \\ = \;& (x+1) - 3x\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3x^2\sqrt[3]{x+1} - x^3 + 3x(\alpha - x)^2 + 3x^2(\alpha - x) - (x + 1 - x^3) \\ = \;& -3x\alpha^2 + 3x^2\alpha + 3x(\alpha - x)^2 + 3x^2(\alpha - x) \\ = \;& -3x\alpha^2 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 - 6x^2\alpha + 3x^3 + 3x^2\alpha - 3x^3 \\ = \;& 0. \end{aligned}$$

damit ist alles gezeigt.

6.6.3 Geben Sie ein Beispiel für ein t, das gleichzeitig algebraisch, logarithmisch und exponentiell ist.
Betrachte $1 \in K$, es ist 1 Nullstelle von $f(t) = t - 1$, also algebraisch $1'/1 = 0 = 1'$, also exponentiell und $1' = 0 = 1'/1$, also logaritmisch.

6.6.4 Begründen Sie, dass $\mathrm{e}^{x^2/2}$ keine einfache Stammfunktion hat.
Hätte $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}$ eine einfache Stammfunktion f, so wäre doch

$$f(\sqrt{2}x) - f(0) = \int_0^{\sqrt{2}x} \mathrm{e}^{t^2/2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{\tau^2}\, d\tau$$

d.h.

$$x \mapsto \sqrt{2}\big(f(\sqrt{2}x) - f(0)\big)$$

eine einfache Stammfunktion von e^{x^2}. Widerspruch.

6.6.5 Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ hat e^{x^k} keine einfache Stammfunktion.
Nach Theorem 6.6.2 reicht es zu zeigen, dass $a' + kax^{k-1} = 1$ keine rationale Lösung a hat.
Angenommen $a = P/Q$ mit teilerfremden Polynomen P, Q löst diese Differentialgleichung.
Wir unterscheiden:

- Q ist konstant: Es sei n der Grad von P, dann hat $ka(x)x^{k-1}$ den Grad $n + k - 1$, $a'(x)$ den Grad $n - 1$, d.h. $a'(x) + ka(x)x^{k-1}$ den Grad $n + k - 1$, ist also $\neq 1$.

- Q hat eine Nullstelle $x_0 \neq 0$, ist x_0 λ–fache Nullstelle, so ist a von der Form

$$a(x) = \sum_{\nu=-\lambda}^{\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu$$

mit $b_{-\lambda} \neq 0$. Damit ist

$$a'(x) = \sum_{\nu=-\lambda}^{\infty} b_\nu \nu (x - x_0)^{\nu-1}$$

also ist x_0 ist $ka(x)x^{k-1}$ ein Pol der Ordnung λ, in $a'(x)$ ein Pol der Ordnung $\lambda+1$, d.h. es kann nicht $ka(x)x^{k-1} + a'(x) = 1$ sein.

- Q hat 0 als einzige Nullstelle, es sei 0 λ–fache Nullstelle, wir haben wieder:

$$a(x) = \sum_{\nu=-\lambda}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

mit $b_{-\lambda} \neq 0$. Damit ist

$$a'(x) = \sum_{\nu=-\lambda}^{\infty} b_\nu \nu x^{\nu-1}$$

also ist x_0 ist $ka(x)x^{k-1}$ ein Pol der Ordnung $\lambda-k+1$, in $a'(x)$ ein Pol der Ordnung $\lambda+1$, d.h. es kann nicht $ka(x)x^{k-1} + a'(x) = 1$ sein.

Also hat e^{x^k} keine einfache Stammfunktion.