Zu Abschnitt 5.1

5.1.1 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathrm{Abb}([0,1],\mathbb{R})$ ist ein Unterraum?

a) $\{f \mid f$ ist stetig bei 0 oder bei $1\}$.

b) $\{f \mid f$ ist stetig bei 0 und bei $1\}$.

c) $\{f \mid f$ ist eine Lipschitzabbildung$\}$.

d) $\{f \mid f$ ist unstetig bei $1/2\}$.

a) Beh: $U_1 := \{f \mid f$ ist stetig bei 0 oder bei $1\}$ ist kein Unterraum von $\mathrm{Abb}([0,1],\mathbb{R})$.

Betrachte $\chi_{\{0\}}$,[1] es ist $\chi_{\{0\}} \in U_1$, da $\chi_{\{0\}}(x) \to 0 = \chi_{\{0\}}(1)$ für $x \to 1$, und es ist analog $\chi_{\{1\}} \in U_1$ wegen der Stetigkeit bei 0.

Aber $\chi_{\{0\}} + \chi_{\{1\}} = \chi_{\{0,1\}} \notin U_1$, denn es ist

$$\chi_{\{0,1\}}\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \not\to 1 = \chi_{\{0,1\}}(0),\ n \to \infty$$

und

$$\chi_{\{0,1\}}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \not\to 1 = \chi_{\{0,1\}}(1),\ n \to \infty,$$

das heißt aber gerade $\chi_{\{0,1\}} \notin U_1$, was heißt, dass U_1 kein Unterraum ist.

b) Beh.: $U_2 := \{f \mid f$ ist stetig bei 0 und bei $1\}$ ist ein Unterraum.

Zunächst ist $U_2 \neq \emptyset$, da z.B. $0 \in U_2$, da konstante Funktionen stets stetig sind. Seien nun $f, g \in U_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sowie $x \in \{0,1\}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $x_n \to x$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f+\lambda g)(x_n) &= f(x_n) + \lambda g(x_n) \\ &\overset{\text{Stetigkeit von } f,\,g \text{ bei } x}{\to} f(x) + \lambda g(x) \\ &= (f+\lambda g)(x).\end{aligned}$$

Also ist $f + \lambda g \in U_2$ und U_2 ist ein Unterraum.

c) Beh.: $U_3 := \{f \mid f$ ist eine Lipschitzabbildung$\}$ ist ein Unterraum.

Wegen $0 \in U_3$ ist $U_3 \neq \emptyset$, seien also $f, g \in U_3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt, wenn L_f resp. L_g Lipschitzkonstanten für f resp. g bezeichnen, für $x, y \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\big|(f+\lambda g)(x) - (f+\lambda g)(y)\big| &\leq |f(x) - f(y)| + |\lambda||g(x) - g(y)| \\ &\leq L_f|x-y| + |\lambda|L_g|x-y| \\ &= (L_f + |\lambda|L_g)|x-y|\end{aligned}$$

was $f + \lambda g \in U_3$ zeigt.

d) Beh.: $U_4 := \{f \mid f$ ist unstetig bei $1/2\}$ ist kein Unterraum.

Betrachte $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(1/2) := 1$ und $f(x) := 0$ für $x \neq 1/2$. Dann sind f und $-f$ unstetig bei $1/2$ (p.e. ist $f\big(1/2 - 1/(2n)\big) \to 0 \neq f(1/2) = 1$ für $n \to \infty$), also $f, -f \in U_4$, aber $0 = f + (-f)$ ist stetig bei $1/2$, also $0 \notin U_4$, d.h. U_4 ist kein Unterraum.

5.1.2 Sei V ein Vektorraum von reellwertigen Funktionen auf einer Menge M. Dann ist die punktweise definierte Relation „$\leq$“ eine Ordnungsrelation auf V.

---

[1] die charakteristische Funktion der Menge $\{0\}$ für eine Menge M und eine Teilmenge $A \subset M$ ist $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ durch $\chi_A(m) = 1$ falls $m \in A$ und $\chi_A(m) = 0$ für $m \in M \setminus A$.

a) Sei V der Raum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die konstante Einsfunktion $\mathbf{1}$ Supremum der Menge $\Delta = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist. Dabei sei f_n die Funktion $x \mapsto \sin(nx)$.

(Zu zeigen ist also, dass erstens $\mathbf{1} \geq f_n$ für alle n gilt und dass $h \geq \mathbf{1}$ sein muss, wenn h eine stetige Funktion ist, für die $h \geq f_n$ für alle n gilt.)

b) In dem vorstehend definierten Raum hat jede endliche Menge ein Supremum.

c) Diesmal sei V der Raum $C^1\,[0,1]$. Zeigen Sie, dass zweielementige Teilmengen manchmal ein Supremum besitzen, manchmal aber auch nicht.

a) Zunächst ist sicher $f_n \leq \mathbf{1}$ für $n \in \mathbb{N}$, denn für $x \in [0,1]$ ist

$$f_n(x) = \sin(nx) \leq 1 = \mathbf{1}(x).$$

Sei nun also $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und gelte $f_n \leq h$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist $\mathbf{1} \leq h$.

Dazu zeigt man, dass

$$A := \{x \mid f_n(x) = 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

dicht in $[0,1]$ liegt (das reicht, denn aus der Voraussetzung an h folgt $\mathbf{1}_A \leq h|_A$, also wegen der Stetigkeit von $\mathbf{1}$ und h auch $\mathbf{1} \leq h$, q.e.d.).

Sei also $x \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$, wähle eine rationale Zahl $q = 2k/n$ mit $\left|2k/n - x\pi^{-1}\right| < \varepsilon/(2\pi)$, und wähle n dabei so, dass $\pi/(2n) < \varepsilon/2$ (das ist durch Erweitern stets möglich), setze nun

$$a := \frac{2}{k}n\pi + \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

dann gilt einerseits:

$$\begin{aligned} |x-a| &\leq \left|x - \frac{2k}{n}\pi\right| + \frac{\pi}{2n} \\ &= \pi\left|\frac{x}{\pi} - q\right| + \frac{\pi}{2n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

und andererseits:

$$f_n(a) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

also $a \in A$.

b) Sei also $M \subset C\,[0,1]$ endlich, $M = \{f_1, \dots, f_n\}$ es ist $f := \max_{1 \leq i \leq n} f_i$ eine stetige Funktion[2)], wir zeigen, dass $f = \sup M$ gilt:

- $M \leq f$ ist klar nach Definition von f,
- sei also $g \in C[0,1]$ mit $M \leq g$ und $x \in [0,1]$, wähle $1 \leq i \leq n$ mit $f(x) = f_i(x)$, es folgt, dass

$$f(x) = f_i(x) \leq g(x)$$

da x beliebig war also $f \leq g$

[2)] Für $n = 2$ folgt das aus $\max\{a,b\} = 1/2 \cdot \big(a + b + |a-b|\big)$, für $n \geq 3$ durch Induktion.

c) Betrachte zunächst $0, \mathbf{1} \in V$. Die Menge $M := \{0, \mathbf{1}\}$ hat sicher das Supremum $\mathbf{1}$ in V, denn:

Es ist $0 \leq \mathbf{1}$, also gilt $M \leq \mathbf{1}$, für ein $g \in V$ mit $M \leq g$ folgt wegen $\mathbf{1} \in M$ sofort, dass $\mathbf{1} \leq g$, was $\mathbf{1} = \sup M$ zeigt.

Betrachte andererseits $M := \{\mathbf{1}/2 - \mathrm{id}, \mathrm{id} - \mathbf{1}/2\}$, offenbar gilt für $x \in [0,1]$, dass

$$\sup\{1/2 - x, x - 1/2\} = |x - 1/2|$$

wir zeigen, dass M kein Supremum in V hat:

Sei dazu $M \leq h$ für ein $h \in V$, wir zeigen, dass ein $g \in V$ mit $M \leq g \leq h$, $h \neq g$ existiert:

Betrachte die Stelle $1/2$, angenommen, es wäre $h(1/2) = 0$, für $\eta > 0$ folgte, dass

$$\frac{h(1/2 + \eta)}{\eta} \geq \frac{\eta}{\eta} = 1$$

also $h'(1/2) \geq 1$, andererseits wäre für $\eta < 0$:

$$\frac{h(1/2 + \eta)}{\eta} \leq \frac{-\eta}{\eta} = -1$$

also sicher $h'(1/2) \leq -1$, d.h. $h(1/2) = 0$ ist unmöglich, es ist also $h(1/2) > 0$. Da nun aber h und $|\cdot - 1/2|$ stetige Funktionen sind, existiert $\varepsilon > 0$ mit $h(x) - |x - 1/2| > h(1/2)/2$ für $|x - 1/2| < \varepsilon$. Wähle nun $\varphi \in C_0^\infty([0,1])$ mit $\varphi \leq h(1/2)/2$, $\varphi(1/2) = h(1/2)/2$, $\varphi \geq 0$ und $\operatorname{supp} \varphi \subset [1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon]$, dann ist $g := h - \varphi \in V$, $g \leq h$ und $M \leq g$ sowie $g \neq h$, das war aber zu zeigen.

Zu Abschnitt 5.2

5.2.1 (f_n) sei eine Folge von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Für welche der folgenden Eigenschaften E gilt „Falls alle f_n die Eigenschaft E haben, so auch f“?

a) E: „Die Funktion ist bei 5 größer als bei 4.9“.

b) E: „Die Funktion ist nichtnegativ bei allen ganzen Zahlen“.

c) E: „Die Funktion ist stetig bei 0“.

d) E: „Die Funktion ist konvex“.

a) Nein.

Betrachte $f_n(x) := x/n$, dann gilt $f_n \to 0$ punktweise und $f_n(5) = 5/n > 4.9/n = f_n(4.9)$ für alle n, aber es ist $f(5) = 0 \not> 0 = f(4.9)$.

b) Ja.

Sei $z \in \mathbb{Z}$, dann gilt $f_n(z) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ also auch

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z) \geq 0.$$

c) Nein.

Betrachte $f_n(x) := \max\{|1 - x|^n, 1\}$, dann gilt $f_n(x) \to 1$ für $x \notin (0,2)$ und $f_n(x) \to 0$ für $x \in (0,2)$.

Die f_n sind stetig in 0 als Komposition stetiger Funktionen, f ist es aber wegen $f(1/n) = 0$, $f(-1/n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht.

d) Ja.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$ dann ist

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= \lim_{n\to\infty} f_n\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \big(\lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)\big) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \end{aligned}$$

5.2.2 Sei $k \in \mathbb{N}$ und (P_n) eine Folge von Polynomen, für die der Grad $\leq k$ ist. Die P_n sollen punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergieren. Zeigen Sie, dass auch f ein Polynom mit Grad $\leq k$ sein muss.

Anleitung: Es sei $P_n(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{jn} x^j$ für $n \in \mathbb{N}$. Man zeige durch Induktion nach k, dass die Folgen $(a_{jn})_{n\in\mathbb{N}}$ der Koeffizienten konvergent sind. Dazu ist es sinnvoll, sich um die (nach Voraussetzung konvergenten) Folgen $\big(P_n(x+1) - P_n(x)\big)$ zu kümmern.
Man zeigt also zunächst durch vollständige Induktion nach k, daß die Koeffizienten der Polynome P_n notwendig konvergent sind:

- Induktionsverankerung: $k = 0$

  Im Fall $k = 0$ gilt $\forall n \in \mathbb{N} : P_n(x) = a_{0n} \in \mathbb{R}$ (die Polynome P_n sind ja vom Grad 0), nach Voraussetzung gilt aber, da (P_n) Punktweise gegen f konvergiert:

  $$f(0) = \lim_{n\to\infty} P_n(0) = \lim_{n\to\infty} a_{0n}$$

  also konvergiert auch die Koeffizienten Folge $(a_{0n})_n \in \mathbb{N}$.

- Induktionsvoraussetzung:

  Für beliebiges, aber festes $k \in \mathbb{N}_0$ gelte, daß für jede Folge (P_n) mit $P_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} a_{jn} x^j$ von Polynomen mit Grad $\leq k$, die Punktweise gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert mit für $0 \leq j \leq k$ auch die Folge der Koeffizienten (a_{jn}) konvergiert.

- Induktionsschluß:

  Es sei (P_n) mit $P_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{k+1}$ eine Folge von Polynomen vom Grad $\leq k+1$, die punktweise gegen eine Fukntion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergieren.

  z.Z.: Für alle $0 \leq j \leq k+1$ konvergiert auch die Folge $(a_{jn})_n \in \mathbb{N}$ der Koeffizienten.

  Definiere für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $Q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $Q_n(x) := P_n(x+1) - P_n(x)$, weiterhin sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := f(x+1) - f(x)$, dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

  $$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) \overset{\text{GWS}}{=} \lim_{n\to\infty} P_n(x+1) - \lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x+1) - f(x) = g(x)$$

  mithin ist die Folge $(Q_n)_n \in \mathbb{N}$ punktweise konvergent gegen g.

Man betrachtet nun für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion Q_n:

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= P_n(x+1) - P_n(x) \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} a_{jn}(x+1)^j - \sum_{j=0}^{k+1} a_{jn}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left(a_{jn} \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} x^\nu \right) - \sum_{j=0}^{k+1} a_{jn}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{\nu=0}^{j} a_{jn} \binom{j}{\nu} x^\nu - \sum_{j=0}^{k+1} a_{jn}x^j \\
&= \sum_{\nu=0}^{k+1} \sum_{j=\nu}^{k+1} \left(a_{jn} \binom{j}{\nu} \right) x^\nu - \sum_{j=0}^{k+1} a_{jn}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left(\sum_{\nu=j}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j} \right) x^j - \sum_{j=0}^{k+1} a_{jn}x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \left[\left(\sum_{\nu=j}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j} \right) - a_{jn} \right] x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[\left(\sum_{\nu=j}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j} \right) - a_{jn} \right] x^j + (a_{k+1,n} - a_{k+1,n})x^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[\left(\sum_{\nu=j}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j} \right) - a_{jn} \right] x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left[\left(\sum_{\nu=j+1}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j} \right) + a_{jn} - a_{jn} \right] x^j \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{\nu=j+1}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j} \right) x^j
\end{aligned}$$

Mithin ist die Folge (Q_n) eine Folge von Polynomen vom Grad $\leq k$, die punktweise gegen eine Funktion g konvergiert, nach Induktionsvoraussetzung sind somit die Koeffizientenfolgen (b_{jn}) gegeben durch

$$\forall 0 \leq j \leq k \;\forall n \in \mathbb{N} : b_{jn} := \sum_{\nu=j+1}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j}$$

konvergent.

Man zeigt nun durch Induktion nach j, daß daraus für $1 \leq j \leq k+1$ die Konvergenz der Koeffizientenfolge $(a_{jn})_n \in \mathbb{N}$ folgt:

- Indukstionsanfang $j = k+1$:

  Man betrachte die Koeffizientenfolge b_{kn}, diese ist, wie bereits gezeigt konvergent, für $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\begin{aligned} b_{kn} &= \sum_{\nu=k+1}^{k+1} \binom{\nu}{k} a_{\nu n} \\ &= \binom{k+1}{k} a_{n,k+1} \\ &= (k+1) \cdot a_{n,k+1} \end{aligned}$$

Da aber (b_{kn}) konvergent ist und k eine Konstante, ist nach den GWS auch $(a_{k+1,n})$ konvergent.

- Induktionsvoraussetzung:
  Es gelte für $1 \leq j \leq k+1$ beliebig, aber fest, daß für alle κ mit $j+1 \leq \kappa \leq k+1$ die Folge der Koeffizienten $a_{\kappa n}$ konvergiert.

- Induktionsschluß:
  z.Z.: Die Folge a_{jn} konvergiert.
  Man betrachte die Folge $(b_{j-1,n})$ diese ist wegen $j \geq 1$ konvergent, es gilt aber:

$$\begin{aligned} b_{j-1,n} &= \sum_{\nu=j}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j-1} \\ &= \binom{j}{j-1} a_{jn} + \sum_{\nu=j+1}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j-1} \\ \Longleftrightarrow \quad a_{jn} &= \frac{b_{j-1,n} - \sum\limits_{\nu=j+1}^{k+1} a_{\nu n} \binom{\nu}{j-1}}{j} =: c_n \end{aligned}$$

  Die Folge (c_n) ist nach Induktionsvoraussetzung eine Summe von konvergenten Folgen und somit nach den Grenzwertsätzen konvergent, damit ist auch (a_{jn}) konvergent dies war aber zu zeigen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Folge a_{0n} der absoluten Glieder von P_n konvergiert:

N.V. konvergiert $P_n(0)$ gegen $f(0)$, da aber $\forall n \in \mathbb{N} : P_n(0) = a_{0n}$ konvergiert auch (a_{0n}).

Also sind alle Koeffizientenfolgen (a_{jn}) konvergent, dies wollte man aber zeigen.

Sei nun (P_n) eine beliebige Folge von Polynomen des Grades $\leq k$ die pnuktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wie bisher gezeigt, sind dann mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : P_n(x) = \sum_{j=0}^{k} a_{jn} x^j$$

auch die Koeffizientenfolgen (a_{nj}) konvergent, es sei

$$\forall 0 \leq j \leq k : a_j := \lim_{n \to \infty} a_{nj}$$

betrachte die Funktion

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \end{aligned}$$

diese ist offenbar ein Polynom vom Grad kleiner gleich k, man zeigt nun, daß (P_n) punktweise gegen P konvergiert:
z.Z:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} P_n(x) = P(x)$$

Es sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} a_{jn} x^j \\ &\overset{\text{GWS}}{=} \sum_{j=0}^{k} \left(\lim_{n\to\infty} a_{jn} \right) x^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_j x^j \\ &= P(x) \end{aligned}$$

Da (P_n) punktweise gegen P und f konvergiert, der punktweise Limes einer Funktionenfolge aber eindeutig bestimmt ist, folgt $f = P$, mithin ist f (also P) ein Polynom vom Grad $\leq k$.
Dies war aber zu zeigen.

5.2.3 Sei M eine Menge. M ist genau dann endlich, wenn jede punktweise konvergente Folge reellwertiger Funktionen auf M bereits gleichmäßig konvergent ist.

$\Rightarrow$ Sei $A \subset \mathbb{R}$ endlich, gelte etwa $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und seien $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ so, daß $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ auf A punktweise gegen f konvergiert, d.h.

$$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

zu zeigen ist, daß $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ sogar gleichmäßig konvergiert, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, wähle nach Vorraussetzung zu jedem $1 \leq i \leq k$ ein $n_i \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f_n(x_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon \quad \text{f.a. } n \geq n_i$$

Setze nun $n_0 := \max_{1\leq i\leq k} n_i$, sei $n \geq n_0$ und $x \in A$ beliebig, da A endlich ist, existiert ein $1 \leq i \leq k$ mit $x = x_i$, es ist

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x_i) - f(x_i)| \overset{n \geq n_0 \geq n_i}{\leq} \varepsilon$$

Also konvergiert $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ sogar gleichmäßig gegen f.

$\Leftarrow$ Sei zunächst $A \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt, daß heißt

$$\forall R > 0\ \exists a \in A : |a| > R$$

betrachte nun für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A : f_n(x) := \frac{x}{n}$$

Als Komposition stetiger Funktionen sind die f_n offenbar stetig auf A.

Beh.: $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ konvergiert auf A punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Bew.:

- Man zeigt zunächst, daß $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ punktweise gegen 0 konvergiert, zu zeigen ist

  $$\forall x \in A\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

  Seien also $x \in A, \varepsilon > 0$ beliebig, wähle nach dem Archimedesaxiom $n_0 \in \mathbb{N}$ so daß

  $$\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{|x|+1}$$

  für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für diese n:

  $$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \cdot |x| \leq \frac{\varepsilon |x|}{|x|+1} < \varepsilon$$

  Das war aber zu zeigen.
  Also konvergiert (f_n) auf A punktweise gegen Null.
- Nun zeigt man, daß (f_n) nicht gleichmäßig konvergiert. Da pnuktweise Konvergenz für gleichmäßige notwendig ist, reicht es zu zeigen, daß $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ nicht gleichmäßig gegen Null konvergiert. Zu zeigen ist also

  $$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists x_0 \in A\ \exists n \geq n_0 : |f_n(x)| > \varepsilon_0$$

  Wähle nun $\varepsilon_0 := 1$, sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, wähle, da A unbeschränkt ist, ein $x_0 \in A$ mit $|x_0| > n_0$, setze $n := n_0$, dann gilt

  $$|f_n(x_0)| = \frac{|x_0|}{|n_0|} > \frac{|n_0|}{|n_0|} = 1 = \varepsilon_0$$

  Das war aber zu zeigen.
  Also konvergiert $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ auf A nicht gleichmäßig gegen Null.

Auf A existiert also eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

Sei nun $A \subset \mathbb{R}$ nicht endlich und beschränkt.

Als nicht endliche, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt A nach dem Satz von Balzano-Weierstraß einen Häufungspunkt $\xi \in \mathbb{R}$. Man betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\begin{aligned} f_n : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0; & \text{für } x \leq \xi - \frac{2}{n} \\ n^2(x-\xi) + 2n; & \text{für } \xi - \frac{2}{n} < x \leq \xi - \frac{1}{n} \\ -n^2(x-\xi); & \text{für } \xi - \frac{1}{n} < x < \xi \\ 0; & \text{für } x = \xi \\ n^2(x-\xi); & \text{für } \xi < x \leq \xi + \frac{1}{n} \\ -n^2(x-\xi) + 2n; & \text{für } \xi + \frac{1}{n} < x < \xi + \frac{2}{n} \\ 0; & \text{für } x \geq \xi + \frac{2}{n} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion f_n ist offenbar stetig auf $A \cap (-\infty, \xi - \frac{2}{n})$, $A \cap (\xi - \frac{2}{n}, \xi - \frac{1}{n})$, $A \cap (\xi - \frac{1}{n}, \xi)$, $A \cap (\xi, \xi + \frac{1}{n})$, $A \cap (\xi + \frac{1}{n}, \xi + \frac{2}{n})$ sowie $A \cap (\xi + \frac{2}{n}, \infty)$. Es bleibt zu zeigen, daß f_n an den Stellen $\xi - \frac{2}{n}, \xi - \frac{1}{n}, \xi, \xi + \frac{1}{n}, \xi + \frac{1}{n}$, falls diese in A liegen, stetig ist.
Man betrachte zunächst $\xi - \frac{2}{n}$ und $\xi + \frac{2}{n}$, f_n hat dort offensichtlich den links- und rechtsseitigen Grenzwert 0, dieser stimmt mit dem Funktionswert überein. Also ist f_n in diesen Punkten stetig.
Auch in den Punkten $\xi + \frac{1}{n}, \xi - \frac{1}{n}$ stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert offenbar mit dem Funktionswert n überein.
Im Punkte ξ gilt

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x < \xi}} -n^2(x - \xi) = 0$$

und

$$\lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} f_n(x) = \lim_{\substack{x \to \xi \\ x > \xi}} n^2(x - \xi) = 0$$

also ist f_n auch im Punkt ξ stetig (falls er zu A gehört).

Die Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$ sind also auf ganz A stetig.

Beh.: Die Folge $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Bew.:

- Man zeigt zunächst, daß $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ auf A punktweise gegen Null konvergiert, zu zeigen ist

  $$\forall x \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

  Seien $x \in A, \varepsilon > 0$ beliebig, man unterscheidet drei Fälle:

  a) $x < \xi$
  Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x < \xi - \frac{2}{n}$ für alle $n \geq n_0$, dies ist wegen des Archimedesaxioms stets möglich. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

  $$|f_n(x)| \stackrel{\text{Def von } f_n}{=} 0 \leq \varepsilon$$

  b) $x = \xi$
  Wähle $n_0 := 1$, für alle $n \geq n_0$ gilt

  $$|f_n(x)| = 0 \leq \varepsilon$$

  c) $x > \xi$
  Wähle nach dem Archimedesaxiom $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß für $n \geq n_0$ $\xi + \frac{2}{n} < x$ gilt, dann ist für diese n:

  $$|f_n(x)| = 0 \leq \varepsilon$$

  Damit ist alles gezeigt, $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ konvergiert also auf ganz A punktweise gegen 0.

- Man zeigt nun noch, daß $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ nicht gleichmäßig gegen Null konvergiert, zu zeigen ist

  $$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall n_0 \in \mathbb{N} \; \exists x_0 \in A \; \exists n \geq n_0 : |f_n(x)| > \varepsilon_0$$

  Man wähle $\varepsilon_0 := 1$, sei $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Da ξ ein Häufungspunkt von A ist, existiert ein $x_0 \in A$ mit $x \neq \xi$ und $|x - \xi| \leq \frac{1}{n_0+1}$. Wähle nun $n \geq n_0$ mit

  $$\frac{1}{n^2} < |x - \xi| \leq \frac{1}{n}$$

Dies ist stets möglich, wähle $n := \max\{n \in \mathbb{N} \mid |x - \xi| \leq \frac{1}{n}\}$ dann ist wegen $|x - \xi| \leq \frac{1}{2}$ (da $n_0 \geq 1$!) und $n^2 > n$ für $n \geq 2$ obige Bedingung erfüllt. Nun ist aber für dieses n:

a) Im Fall $x < \xi$ ist

$$\begin{aligned} |f_n(x_0)| &\overset{|x_0 - \xi| \leq \frac{1}{n}}{=} \left|-n^2(x_0 - \xi)\right| \\ &= \left|n^2\right||x_0 - \xi| \\ &\overset{\text{Wahl von } n}{>} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= 1 = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

b) Im Fall $x > \xi$ ist

$$\begin{aligned} |f_n(x_0)| &\overset{|x_0 - \xi| \leq \frac{1}{n}}{=} \left|n^2(x_0 - \xi)\right| \\ &= \left|n^2\right||x_0 - \xi| \\ &\overset{\text{Wahl von } n}{>} n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= 1 = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Stets ist also $f_n(x_0) > \varepsilon_0$, das war aber zu zeigen, d.h. $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ konvergiert auf A nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Also existiert in A eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert.

5.2.4 Es seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die alle Lipschitzabbildungen mit Lipschitzkonstante $\leq L_n$ sind. Wenn die f_n punktweise gegen eine Funktion f konvergieren und die Zahlen L_n beschränkt sind, so ist auch f eine Lipschitzabbildung.
Gilt das auch ohne die Voraussetzung der Beschränktheit der L_n?
Da die L_n beschränkt sind, existiert $L \in \mathbb{R}$ mit $L_n \leq L$ für alle $n \in \mathbb{N}$, weiter gilt für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L_n|x - y| \leq L|x - y|$$

also mit $n \to \infty$ wg. der Punktweisen Konvergenz auch

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

d.h. f ist Lipschitzabbildung.
Ohne die Beschränktheit der L_n ist das falsch. Betrachte etwa $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & x < -1/n \\ nx & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1 & x > 1/n \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

f ist noch nicht einmal stetig, also erst recht nicht Lipschitz, für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist aber f_n eine Lipschitzabbildung zu n, denn für $x < y \in \mathbb{R}$ ist:

- Im Falle $x, y \leq -1/n$ ist $f_n(x) = f_n(y)$

- Im Falle $x \leq -1/n < y < 1/n$ ist:
$$|f_n(x) - f_n(y)| = |-1 - ny| \leq |nx - ny| = n|x - y|$$
- Im Falle $x \leq -1/n < 1/n \leq y$ ist:
$$|f_n(x) - f_n(y)| = |-1 - 1| = 2 \leq \frac{2}{n} \cdot n \leq n|x - y|$$
- Im Falle $-1/n < x < y < 1/n$ ist:
$$|f_n(x) - f_n(y)| = |nx - ny| = n|x - y|$$
- Im Falle $-1/n < x < 1/n \leq y$ ist:
$$|f_n(x) - f_n(y)| = |nx - 1| \leq |nx - ny| = n|x - y|$$
- und schließlich ist für $1/n \leq x < y$ wieder $f_n(x) = f_n(y)$.

5.2.5 Geben Sie ein Beispiel für eine Folge stetiger Funktionen an, die punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen eine stetige Funktion konvergiert.
Betrachte $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_n(x) := x/n$. Dann gilt $f_n \to 0$ punktweise, denn für $x \in \mathbb{R}$ ist $(x/n) \in c_0$ nach Archimedes.
Andererseits ist aber nicht $f_n \to 0$ gleichmäßig, denn für kein $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt: Sei nämlich $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$, mit $n := N$, $x := n\varepsilon$ ist
$$f_n(x) = f_n(n\varepsilon) = \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$
Also gilt $f_n \to 0$ nicht gleichmäßig.

5.2.6 Muss der gleichmäßige Limes von Lipschitzabbildungen Lipschitzabbildung sein?
Nein. Betrachte etwa $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. f ist keine Lipschitzabbildung (da die Ableitung von f unbeschränkt ist).
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist aber $f|_{[1/n,1]}$ eine Lipschitzabbildung zur Lipschitzkonstante $\sqrt{n}/2$ nach dem Mittelwertsatz:
$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}|x - y| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}|x - y|$$
Definiere nun $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch:
$$f_n(x) := \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 1/n \\ \sqrt{n}x & x \leq 1/n \end{cases}$$
Dann ist f_n eine Lipschitzabbildung, denn für $x, y \geq 1/n$ stimmt f_n mit f überein und dort ist f Lipschitz, für $x, y \leq 1/n$ ist f_n linear, also Lipschitz, also ist f_n Lipschitz. Weiterhin gilt:
$$\begin{aligned} \|f_n - f\| &\leq \sup_{x \leq 1/n} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \geq 1/n} |f_n(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{x \leq 1/n} |f_n(x)| + \sup_{x \leq 1/n} |f(x)| \\ &= \sqrt{n} \cdot 1/n + \sqrt{1/n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0. \end{aligned}$$

Also gilt $f_n \to f$ gleichmäßig und damit ist alles gezeigt.

5.2.7 (f_n) sei eine aufsteigende Folge stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Dann ist f das Supremum der Menge $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ im geordneten Raum $C\mathbb{R}$.
Sicher ist $f_n \le f$ für $n \in \mathbb{N}$, da (f_n) aufsteigend ist, also

$$f_n(x) \le f_{n+m}(x) \to f(x), \quad m \to \infty.$$

Sei also $g \in C\mathbb{R}$ mit $f_n \le g$ für $n \in \mathbb{N}$, angenommen, es gäbe $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) < f(x)$, es sei $\eta := (f-g)(x) > 0$, wegen $f_n(x) \to f(x)$ existierte $n \in \mathbb{N}$ mit $f(x) - f_n(x) < \eta$, d.h.

$$f_n(x) > f(x) - \eta = f(x) - f(x) + g(x) = g(x),$$

im Widerspruch zu $f_n \le g$.
Also gilt $f \le g$ und die Behauptung ist gezeigt.

5.2.8 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wir setzen $f_n := f/n$.

- Gilt $f_n \to 0$ punktweise?
- Für welche f geht (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion?

- Ja.
  Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann ist wegen $1/n \to 0$ auch
  $$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot f(x) \to 0 \cdot f(x) = 0.$$
- Genau für beschränkte f:
  - $\Rightarrow$ Es gelte also $f_n \to 0$ gleichmäßig. Wähle also ein $n \in \mathbb{N}$, so dass
    $$\frac{|f(x)|}{n} = |f_n(x)| \le 1$$
    für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Es folgt
    $$|f(x)| \le n \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$
    also die beschränktheit von f.
  - $\Leftarrow$ Es sei f durch M beschränkt und $\varepsilon > 0$, wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $M/n \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$, dann gilt für diese n und alle $x \in \mathbb{R}$:
    $$|f_n(x)| = \frac{|f(x)|}{n} \le \frac{M}{n} \le \varepsilon$$
    also $f_n \to 0$ gleichmäßig.

5.2.9 Definiere $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f_n(x,y) := (x^2+y^2)^n$. Auf welchen Teilmengen A von $\mathbb{R}^2$ konvergiert (f_n)

- punktweise gegen 0,
- gleichmäßig gegen 0?

Es bezeichne im Folgenden $D := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$ die euklidische offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^2$:

- Beh.: $f_n|_A \to 0$ punktweise $\iff A \subset D$.

$\Rightarrow$ Angenommen es wäre $A \not\subset D$, dann existiert $x \in A$ mit $\|x\|_2 \geq 1$, dann wäre aber
$$f_n(x) = \|x\|_2^{2n} \geq 1$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, also keine Nullfolge im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $A \subset D$.

$\Leftarrow$ Es sei $x \in A$, dann ist $\|x\|_2 < 1$ nach Voraussetzung, also gilt
$$f_n(x) = \|x\|_2^{2n} \to 0, \quad n \to \infty$$
d.h. $f_n|_A \to 0$ punktweise.

- Beh.: $f_n|_A \to 0$ gleichmäßig $\iff A^- \subset D$.

$\Rightarrow$ Sicher ist $A \subset D$, da gleichmäßige Konvergenz punktweise impliziert, also $A^- \subset D^-$, angenommen es wäre $A^- \not\subset D$, d.h. es gäbe $x_n \in A \subset D$, $x_n \to x$ mit $\|x\|_2 = 1$ (also gilt insbesondere $\|x_n\|_2 \to 1$) .
Wir zeigen nun, dass $f_n \to 0$ gleichmäßig falsch sein muss: Es sei $\varepsilon = 1/2$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, wähle ein $n \geq n_0$ mit $\|x_n\|_2 > \sqrt[2n_0]{\varepsilon}$ (möglich wegen $\|x_n\|_2 \to 1$), dann ist
$$|f_{n_0}(x_n)| = \|x_n\|_2^{2n_0} > \varepsilon = \frac{1}{2}$$
da $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig war, steht das im Widerspruch zur gleichmäßigen Konvergenz.
Also gilt $A^- \subset D$.

$\Leftarrow$ Auf der kompakten Menge A^- nimmt $\|\cdot\|_2$ sein Maximum an, es sei
$$\eta := \max_{x \in A^-} \|x\|_2$$
dann ist $\eta < 1$, da $A^- \subset D$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nun
$$\|f_n|_A\|_\infty = \sup_{x \in A} abs f_n(x) = \sup_{x \in A} \|x\|_2^{2n} \leq \eta^{2n} \to 0$$
also $f_n \to 0$ gleichmäßig.

Zu Abschnitt 5.3

5.3.1 Es seien $h, g \in C[0,1]$ mit $h \leq g$. Zeigen Sie, dass im Fall $h \neq g$ die Menge
$$\Phi := \{f \in C[0,1] \mid h \leq f \leq g\}$$
nicht gleichgradig stetig ist.
Wähle $x_0 \in]0,1[$ mit $h(x_0) < g(x_0)$, und wegen der Stetigkeit von h, g ein $\varepsilon_0 > 0$ so dass mit $\eta := (g-h)(x_0)$ gilt:
$$(g-h)(x) \geq \frac{\eta}{2} \qquad \text{für alle } x \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0, .]$$
Man zeigt nun, dass Φ in x_0 nicht gleichgradig stetig ist, d.h. zu zeigen ist
$$\exists_{\varepsilon > 0} \forall_{\delta > 0} \exists_{f \in \Phi} \exists_{x \in [0,1]} |x - x_0| \leq \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$
Setze $\varepsilon := \varepsilon_0$, es sei $\delta > 0$, sei $\beta < \min\{\varepsilon, \delta\}$ und definiere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x) := \begin{cases} h(x) & x < x_0 - \varepsilon \\ h(x) + \frac{\eta}{2\beta}(x - x_0) & x_0 - \beta \leq x \leq x_0 + \beta \\ g(x) & x_0 + \varepsilon < x \end{cases}$$

und setze f dazwischen so fort, dass $f \in C[0,1]$ und $g \leq f \leq h$. Für $x_0 - \beta < x < x_0 + \beta$ ist nun

$$|f(x) - f(x_0)| \quad = \quad \left|\frac{\eta}{2\beta}(x - x_0)\right|$$

man kann also x wie gefordert wählen, falls nur $2\varepsilon/\eta \cdot \beta < \delta$, wähle dazu nur β hinreichend klein.
Damit ist alles gezeigt.

5.3.2 $f_1, f_2, \ldots$ seien stetige Funktionen auf $[0,1]$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergieren. Dann sind äquivalent:

a) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion f. (Insbesondere ist dann f stetig.)

b) Für alle konvergenten Folgen (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, gilt
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0).$$

a) $\Rightarrow$ b)
Sei also (f_n) gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion f. Da die (f_n) nach Voraussetzung stetig sind, ist auch f stetig. Sei $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ eine beliebige konvergente Folge in $[0,1]$ und $x_0 \in [0,1]$ ihr Grenzwert.
zu zeigen ist:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |f_n(x_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt mit $x_n \to x_0$ auch $f(x_n) \to f(x_0)$ für $n \to \infty$, wähle ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_n) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_1$, wähle weiterhin $n_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_2$ und alle $x \in [0,1]$. Dann gilt für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x_n) - f(x_0)| &= |f_n(x_n) - f(x_n) + f(x_n) - f(x_0)| \\
&\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x_0)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

b) $\Rightarrow$ a)
Sei also (f_n) eine Folge in $C[0,1]$, und f eine Funktion auf $[0,1]$, so daß für jede konvergente Folge (x_n) in $[0,1]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$$

Dann hat auch jede Teilfolge (f_{n_k}) offenbar diese Eigenschaft.

zu zeigen ist, daß f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, zunächst zeigt man, daß f_n punktweise gegen f konvergiert, d.h.
$$\forall x_0 \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

dies folgt aber sofort aus der Voraussetzung, da für jedes x_0 die konstante Folge $(x_0)_n \in \mathbb{N}$ eine gegen x_0 konvergente Folge ist.

Man zeigt nun, daß $\Phi := \{f_n n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und gleichgradig stetig ist:

- Φ ist beschränkt:

  Angenommen, Φ wäre nicht beschränkt, d.h. die Menge $\{\|f_n\| n \in \mathbb{N}\}$ ist unbeschränkt, wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ nach dem Satz vom Maximum und Minimum ein $x_n \in [0,1]$ mit $|f_n(x_n)| = \|f_n\|$. Als Folge in $[0,1]$ besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge x_{n_k}, gelte etwa $\lim_{n\to\infty}[k] x_{n_k} =: x_0$. Betrachte nun die Folge $(|f_{n_k}(x_{n_k}|)$, n.V. gilt

  $$\lim_{n\to\infty}[k]|f_{n_k}(x_{n_k})| = f(x_0)$$

  andererseits ist aufgrund der Wahl der x_n und der Unbeschränktheit von Φ:

  $$\overline{\lim_{k\to\infty}}\,|f_{n_k}(x_{n_k})| = \overline{\lim_{k\to\infty}}\,\|f_{n_k}\| = +\infty$$

  Dies ist ein Widerspruch.

  Also ist Φ beschränkt.

- Φ ist gleichgradig stetig:

  Angenommen Φ wäre nicht gleichgradig stetig, d.h. mit $\delta = \frac{1}{n}$

  $$\exists x_0 \in [0,1]\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in [0,1] : |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \wedge |f_n(x_n) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon$$

  Seien nun $x_0 \in [0,1]$ und (x_n) so gewählt, daß obiges gilt, dann ist offenbar $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und wegen der pktweisen Konvergenz der f_n gilt auch $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ und nach Voraussetzung ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x_0)$.

  Wähle nun $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ und $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ f.a. $n \geq n_0$, für diese n gilt dann

  $$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f_n(x_n) - f_n(x_0)| \\ &= |f_n(x_n) - f(x_0) + f(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq |f_n(x_n) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon \end{aligned}$$

  Dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon > 0$.

  Also ist Φ gleichgradig stetig.

Man zeigt nun, daß f notwendig stetig sein muß:
Als beschränkte und gleichgradig stetige Folge in $C[0,1]$ besitzt (f_n) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge (folgt aus 1(ii) und dem Satz von Arzela-Ascoli), sei (f_{n_k}) eine solche Teilfolge.

Sei (x_n) eine konvergente Folge in $[0,1]$, $x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$, zu zeigen ist die Stetigkeit von f, d.h. $\lim_{n\to\infty}[k] f(x_k) = f(x_0)$, also

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : |f(x_k) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Sei $\varepsilon > 0$, da (f_{n_k}) gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ f.a. $k \geq k_1$ und f.a. $x \in [0,1]$, weiterhin existiert ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $|f_{n_k}(x_k) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq k_2$. Wähle nun $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$, dann gilt für $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &= |f(x_k) - f_{n_k}(x_k) + f_{n_k}(x_k) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| + |f_{n_k}(x_k) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Also ist f stetig in x_0, da x_0 beliebig war, in f also stetig auf $[0,1]$.

Es bleibt zu zeigen, daß (f_n) auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Angenommen, dies gelte nicht, d.h.

$$\exists\varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \geq n_0 \exists x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon$$

Definiere wähle nun zu $n_0 = 1$ ein $n_1 \geq n_0$ und ein $x_1 \in [0,1]$ mit $|f_{n_1}(x_1) - f(x)| > \varepsilon$ und nun induktiv zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \geq n_{k-1} + 1$ und ein $x_k \in [0,1]$ mit $|f_{n_k}(x_k) - f(x)| > \varepsilon$.

Betrachte nun die Folge (f_{n_k}), sie hat (s.o.) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_{k_l}})$, da $[0,1]$ kompakt ist, besitzt auch die Folge (x_{k_l}) eine konvergente Teilfolge $(x_{k_{l_j}})$, sei x_0 ihr Grenzwert, nun gilt einerseits n.V.

$$\lim_{n\to\infty}[j] f_{n_{k_{l_j}}}(x_{k_{l_j}}) = f(x_0)$$

und wegen der Stetigkeit von f gilt

$$\lim_{n\to\infty}[j] f(x_{k_{l_j}}) = f(x_0)$$

durch Anwendung der Grenzwertsätze erhält man hieraus

$$\lim_{n\to\infty}[j] \left(f(x_{k_{l_j}}) - f_{n_{k_{l_j}}}(x_{k_{l_j}}) \right) = 0$$

im Widserspruch zu $\forall k : |f(x_k) - f_{n_k}(x_k)| > \varepsilon$.

Also konvergiert f_n auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion f.

Quod erat demonstrandum.

5.3.3 Man untersuche auf gleichgradige Stetigkeit:

(a) $\{t \mapsto \sin(2^n t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ auf $\mathbb{R}$,

(b) $\{t \mapsto t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auf $[0,a]$, wobei $a > 0$.

Bem.: Die Definition der gleichgradigen Stetigkeit für Funktionenfamilien auf nichtkompakten metrischen Räumen ist wörtlich diesselbe wie im Fall kompakter Räume.

a) Beh.: Die gegebene Funktionenmenge ist nicht gleichgradig stetig.

Bew.:
Es sei die Abbildung $t \mapsto \sin(2^n t)$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichnet, zu zeigen ist

$$\exists t_0 \in \mathbb{R}\ \exists\varepsilon > 0\, \forall\delta > 0\ \exists t \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : |t - t_0| \leq \delta \wedge |f_n(t) - f_n(t_0)| > \varepsilon$$

Wähle $t_0 := 0, \varepsilon := \frac{1}{2}$ sei $\delta > 0$ beliebig, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \delta$ und $t := \frac{\pi}{2^{n+1}}$, dann gilt

$$|t - t_0| = \left|\frac{\pi}{2^{n+1}}\right| \leq \delta$$

aber

$$|f_n(t) - f_n(t_0)| = \left|\sin\left(2^n \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - \sin 0\right| = \sin\frac{\pi}{2} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Also ist $\{t \mapsto \sin(2^n t) n \in \mathbb{N}\}$ auf $\mathbb{R}$ nicht gleichgradig stetig.

b) Man unterscheidet für die Funktionen $g_n : [0,a] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^n$ zwei Fälle

- $0 < a < 1$
  Beh.: In diesem Fall ist $\{g_n n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig.
  Bew.:
  Wie auf dem letzten Übungszettel gezeigt, konvergiert in diesem Fall die Folge $(g_n)_n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, somit ist, wie in der Vorlesung bewiesen die Menge $\{g_n n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig, da eine Menge, die als Elemente nur die Glieder einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen hat, stets gleichgradig stetig ist.

- $a \leq 1$
  Beh.: In diesem Fall ist die gegebene Menge nicht gleichgradig stetig.
  Bew.:
  Zu zeigen ist, daß

  $$\exists t_0 \in [0,a]\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists t \in [0,a]\ \exists n \in \mathbb{N} : |t - t_0| \leq \delta \wedge |g_n(t) - g_n(t_0)| > \varepsilon$$

  wähle $t_0 := 1, \varepsilon := \frac{1}{2}$, sei $\delta > 0$, wähle $t := \max\{0, 1-\delta\}$. Da $0 \leq t < 1$ gilt, ist (t^n) Nullfolge, wähle demnach $n \in \mathbb{N}$ mit $t^n < \frac{1}{2}$, dann ist

  $$|t - t_0| = |t - 1| \leq \delta$$

  andererseits aber

  $$|f_n(t) - f_n(t_0)| = |t^n - 1^n| > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

  Also ist $\{g_n n \in \mathbb{N}\}$ nicht gleichgradig stetig auf $[0,a]$ im Fall $a \geq 1$.

Die Menge $\{g_n n \in \mathbb{N}\}$ ist also nur für $0 < a < 1$ gleichgradig stetig auf $[0,a]$.

5.3.4 Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Genau dann ist f stetig, wenn die Menge $\{f(\cdot,t) \mid t \in [c,d]\}$ in $C[a,b]$ und $\{f(s,\cdot) \mid s \in [a,b]\}$ in $C[c,d]$ liegen und gleichgradig stetig sind.
(Hier ist $f(s,\cdot)$ die Funktion $t \mapsto f(s,t)$, analog für $f(\cdot,t)$.)

- $\Longrightarrow$
  Sei also $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig, da $[a,b] \times [c,d]$ als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ kompakt ist, ist f dann sogar gleichmäßig stetig, d.h. es gilt

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [a,b] \times [c,d] : \|x - y\|_2 \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

  Zunächst wird gezeigt, daß $M_s \subset C[a,b]$ gleichgradig stetig ist, zu zeigen ist also, daß für alle $s_0 \in [a,b]$ gilt:

  $$\begin{gathered}\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in [c,d]\ \forall s \in [a,b] : \\ |s - s_0| \leq \delta \Rightarrow |f(s,t) - f(s_0,t)| \leq \varepsilon\end{gathered}$$

  Sei also $s_0 \in [a,b], \varepsilon > 0$ beliebig, wähle nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so daß

  $$|f(s_0,t) - f(s,t)| \leq \varepsilon$$

  für alle $(s,t) \in [a,b] \times [c,d]$ mit $\|(s_0,t) - (s,t)\|_2 \leq \delta$ gilt.
  Sei nun $t \in [c,d]$ beliebig, $s \in [a,b]$ mit $|s - s_0| \leq \delta$, dann gilt

  $$\|(s,t) - (s_0,t)\|_2 = \|(s - s_0, 0)\|_2 = |s - s_0| \leq \delta$$

und damit aufgrund der Wahl von Delta auch

$$|f(s,t) - f(s_0,t)| \leq \varepsilon$$

Also ist $M_s \subset C[a,b]$ gleichgradig stetig.

Es bleibt zu zeigen, daß $M_t \subset C[c,d]$ gleichgradig stetig ist, also, daß für alle $t_0 \in [c,d]$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall s \in [a,b] \ \forall t \in [c,d] : |t - t_0| \leq \delta \Rightarrow |f(s,t) - f(s,t_0)| \leq \varepsilon$$

Seien $t_0 \in [c,d], \varepsilon > 0$ beliebig, wähle nach Voraussetzung ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(s,t) - f(s,t_0)| \leq \varepsilon$$

für alle $(s,t) \in [a,b] \times [c,d]$ mit $\|(s,t) - (s,t_0)\|_2 \leq \delta$ gilt.

Sei nun $s \in [a,b]$ beliebig, $t \in [c,d]$ mit $|t - t_0| \leq \delta$, dann gilt

$$\|(s,t) - (s,t_0)\|_2 = \|(0,t-t_0)\|_2 = |t - t_0| \leq \delta$$

und damit aufgrund der Wahl von Delta auch

$$|f(s,t) - f(s,t_0)| \leq \varepsilon$$

Also ist $M_t \subset C[c,d]$ gleichgradig stetig.

- $\Longleftarrow$
  Seien also M_s und M_t gleichgradig stetig, zu zeigen ist, daß f stetig ist, d.h.

$$\begin{aligned}\forall (s_0,t_0) \in [a,b] \times [c,d] \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (s,t) \in [a,b] \times [c,d] :& \\ \|(s_0,t_0) - (s,t)\|_2 \leq \delta \Rightarrow |f(s_0,t_0) - f(s,t)| \leq \varepsilon&\end{aligned}$$

Sei $(s_0,t_0) \in [a,b] \times [c,d], \varepsilon > 0$ beliebig, wähle aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit von M_s ein $\delta_1 > 0$ so, daß

$$\forall s \in [a,b] \forall t \in [c,d] : |s - s_0| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(s_0,t) - f(s,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit von M_t ein $\delta_2 > 0$, so daß

$$\forall t \in [c,d] \forall s \in [a,b] : |t - t_0| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(s,t_0) - f(s,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

setzte nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, dann gilt für beliebiges $(s,t) \in [a,b] \times [c,d]$ mit

$$\|(s_0,t_0) - (s,t)\|_2 \leq \delta \Rightarrow |s - s_0|, |t - t_0| \leq \delta$$

folgendes:

$$\begin{aligned} |f(s,t) - f(s_0,t_0)| &= |f(s,t) - f(s_0,t) + f(s_0,t) - f(s_0,t_0)| \\ &\leq |f(s,t) - f(s_0,t)| + |f(s_0,t) - f(s_0,t_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist f stetig.

f ist also genau dann stetig, wenn M_s und M_t gleichgradig stetig sind.

5.3.5 Sei (f_n) eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf $[0,1]$ mit

$$|f_n(0)| \leq 1 \quad \text{und} \quad \|f_n'\| \leq 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt (f_n) eine gleichmäßig konvergente Teilfolge.

5.3.6 Untersuchen Sie die folgende Teilmengen von $C[0,1]$ auf Kompaktheit:

a) $M_1 = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $f_n(x) = (x/2)^n$

b) $M_2 = M_1 \cup \{0\}$

c) $M_3 = \{f \in C[0,1] \mid f \text{ ist Lipschitzstetig}\}$

d) $M_4 = \{f \in C[0,1] \mid f$ ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\leq 1\}$

e) $M_5 = \{f \in C[0,1] \mid f$ ist Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\leq 1, |f| \leq 2\}$

Untersuchen Sie auf gleichgradige Stetigkeit:

f) $M_6 = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, wobei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^2/n$

a) M_1 ist nicht kompakt, da M_1 in $C[0,1]$ nicht abgeschlossen ist: Es gilt nämlich

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x^n}{2^n} = \frac{1}{2^n} \to 0$$

also $f_n \to 0$ in $C[0,1]$, aber $0 \notin M_1$.

b) M_2 ist kompakt: Sei $(O_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von M_2, dann existiert $i_0 \in I$ mit $0 \in O_{i_0}$, in a) wurde $f_n \to 0$ gezeigt, also existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f_n \in O_{i_0}$ für $n \geq n_0$, zu jedem $j < n_0$ existiert nun aber ein $i_j \in I$ mit $f_j \in O_{i_j}$, d.h. $(O_{i_j})_{0\leq j<n_0}$ ist eine endliche Teilüberdeckung und die Kompaktheit von M_2 ist bewiesen.

c) M_3 ist nicht kompakt, da M_3 nicht beschränkt ist, z.B. ist $n\mathbf{1} \in M_3$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, da konstante Funktionen Lipschitzstetig sind, aber es ist $\|n\mathbf{1}\|_\infty = n$.

d) M_4 ist nicht kompakt, da wie in c) $n\mathbf{1} \in M_4$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

e) M_5 ist kompakt: Wir zeigen, dass M_5 beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist:

- Nach Definition von M_5 ist M_5 durch 2 beschränkt.
- Es sei $(f_n) \in M_5^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $f_n \to f \in C[0,1]$. Nach Aufgabe 5.2.4 und deren Beweis ist dann f ebenfalls Lipschitz zu 1, da Konvergenz in $C[0,1]$ punktweise Konvergenz impliziert, weiterhin ist $|f| \leq 2$, da $|f_n(x)| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq x \leq 1$ gilt. Also ist $f \in M_5$.
- Es sei $x_0 \in [0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$, dann ist für $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $f \in M_5$:

  $$|f(x_0) - f(x)| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

  also ist M_5 gleichgradig stetig.

f) M_6 ist gleichgradig stetig: Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon/(2|x_0| + 2\varepsilon)$, es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt nach dem MWS:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &= \frac{1}{n}\left|x^2 - x_0^2\right| \\ &= \frac{1}{n}|2\xi||x - x_0| \\ &\leq |2\xi|\delta \\ &\leq 2(|x_0| + \varepsilon)\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

5.3.7 Zu $\gamma \in [0, 1]$ definieren wir eine Funktion $f_\gamma \in C[0, 1]$ durch

$$f_\gamma(x) = \exp(\gamma x).$$

Sei nun $M := \{f_\gamma \mid \gamma \in [0, 1]\}$ die Menge dieser Funktionen.

a) Man zeige, dass M gleichgradig stetig ist.

b) Ist M sogar kompakt in $C[0, 1]$?

a) Betrachte $f : [0, 1] \to C[0, 1]$, $\gamma \mapsto f_\gamma$, wir zeigen dass f Lipschitzabbildung zu e ist: Es seien $\gamma, \delta \in [0, 1]$, und $x \in [0, 1]$ beliebig, nach dem Mittelwertsatz exisitiert $\xi(x)$ zwischen γx und δx (also insbesondere $\xi(x) \in [0, 1]$ mit

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{\gamma x} - \mathrm{e}^{\delta x}\right| &= \mathrm{e}^{\xi(x)}|\gamma x - \delta x| \\ &= x\mathrm{e}^{\xi(x)}|\gamma - \delta| \\ &\leq 1\mathrm{e}^1|\gamma - \delta| \\ &= \mathrm{e} \cdot |\gamma - \delta| \end{aligned}$$

es folgt

$$\begin{aligned} \|f_\gamma - f_\delta\|_\infty &= \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_\gamma(x) - f_\delta(x)| \\ &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} \mathrm{e} \cdot |\gamma - \delta| \\ &= \mathrm{e}|\gamma - \delta|. \end{aligned}$$

Also ist f Lipschitzstetig, insbesondere stetig, was zeigt, dass $M = f([0, 1])$ als stetiges Bild eines Kompaktums kompakt und damit gleichgradig stetig ist.

b) Das wurde unter a) mitgezeigt.

Zu Abschnitt 5.4

5.4.1 Zeigen Sie, dass die Aussage des Banachschen Fixpunktsatzes ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit nicht stimmen muss. Genauer: Geben Sie für $M = \,]0, 1[$ und $M = \mathbb{Q}$ jeweils eine Kontraktion $f : M \to M$ an, die keinen Fixpunkt besitzt.

- Auf $]0, 1[$ betrachte $f(x) := x/2$, dann ist $f : \,]0, 1[\,\to\,]0, 1[$ stetig und Lipschitz zu $1/2$ (also eine Kontraktion), hat aber keinen Fixpunkt, da $x/2 = x$ genau für $x = 0$ gilt, aber $0 \notin \,]0, 1[$.

•

5.4.2 Auch im Brouwerschen Fixpunktsatz sind alle Voraussetzungen wesentlich. Geben Sie ein f ohne Fixpunkte in den folgenden Fällen an (K soll dabei stets nicht leer sein):

a) f ist stetig, K ist konvex aber nicht kompakt.

b) K ist kompakt und konvex, f ist aber unstetig.

c) f ist stetig, K ist kompakt aber nicht konvex.

a) $K = \mathbb{R}$ ist sicher konvex, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$ ist stetig, hat aber wegen $1 \neq 0$ keinen Fixpunkt.

b) Auf der kompakten konvexen Menge $K = [0, 1]$ hat $f : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$ keinen Fixpunkt.

c) Auf der kompakten Menge $K = [0, 1] \cup [3, 4]$ hat die stetige Funktion $f(x) := 2x - 2$ keinen Fixpunkt, denn

$$2x - 2 = x \iff x - 2 = 0 \iff x = 2 \notin [0, 1] \cup [3, 4].$$

5.4.3 Gilt der Cantorsche Durchschnittssatz auch dann, wenn man ihn mit offenen Kugeln formuliert?
Nein. $[0, 2]$ ist ein vollständiger Metrischer Raum, aber mit $K_n := U_{1/n}(1/n) = \,]\,0, 2/n\,[$ gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \,]\,0, 2/n\,[\, = \emptyset$$

da $2/n \to 0$.

5.4.4 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Das Komplement einer Teilmenge von zweiter Kategorie ist von erster Kategorie.

b) Sind $A_1, A_2, \ldots$ von zweiter Kategorie in M und gilt $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, so ist der Durchschnitt der A_n ebenfalls von zweiter Kategorie.

a) Falsch. Betrachte $\mathbb{R}$, und $A = (-\infty, 0)$, dann ist A von zweiter Kategorie, denn: Angenommen es gäbe nirgends dicht $A_n \subset \mathbb{R}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$, dann wäre

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-1 - A_n) = (-1 - A) = (-1, \infty)$$

und mit $B_{2n} := A_n$, $B_{2n+1} = -1 - A_n$ für $n \in \mathbb{N}$, wären B_n nirgends dicht und

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$$

von erster Kategorie in sich.

Also ist A von zweiter Kategorie, genauso zeigt man, dass auch $A^c = [0, \infty)$ von zweiter Kategorie ist.

b) Falsch. Es sei $M = \mathbb{R}$, dann sind $A_n := [\,0, 1/n\,]$ von zweiter Kategorie in $\mathbb{R}$ (das zeigt man wie in a)), aber es ist

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$$

sogar nirgends dicht in $\mathbb{R}$.

5.4.5 Gibt es einen metrischen Raum, in dem die leere Menge von zweiter Kategorie ist?
Nein. Die leere Menge ist stets nirgens dicht, da sie offen–abgeschlossen ist, d.h. es ist $(\emptyset^-)^\circ = \emptyset$ in jedem metrischen Raum.

5.4.6 Es gibt nicht-vollständige metrische Räume, die von zweiter Kategorie in sich sind. (Die Vollständigkeit ist im Satz von Baire also nur eine hinreichende Bedingung.)
Betrachte $M := (0, \infty)$ mit der euklidischen Metrik. Angenommen es wäre $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit in M nirgends dichten A_n, o.E. sei A_n abgeschlossen in M für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgte, dass

$$[1, \infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(A_n \cap [1, \infty)\big)$$

wäre. Nun ist aber mit $B_n := A_n \cap [1, \infty)$ abgeschlossen in $[1, \infty)$ und das innere von B_n in $[1, \infty)$ ist eine Teilmenge des inneren von B_n in $(0, \infty)$, also leer, d.h. $[1, \infty)$ wäre von erster Kategorie in sich. Widerspruch.
Also ist M von zweiter Kategorie in sich.