Lösungen der Übungsaufgaben von Kapitel 4

zu 4.1

4.1.1 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei als Nullfunktion für $x \leq 0$ und als $x \mapsto x^2$ für $x \geq 0$ definiert. Beweisen Sie, dass f einmal, aber nicht zweimal differenzierbar ist.

Finden Sie allgemeiner für beliebiges vorgegebenes k eine Funktion, die k-mal, aber nicht $(k+1)$-mal differenzierbar ist.

Also zunächst ist f an jeder Stelle $x \neq 0$ unendlich oft differenzierbar, da ja dann f in einer Umgebung von x ein Polynom ist. Es bleibt zu zeigen, dass f in 0 ein– aber nicht zweimal differenzierbar ist:

An der Stelle 0 ist aber:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} h \\
&= 0 \\
\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die erste Ableitung von f ist also:

$$f' : x \mapsto \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und f ist einmal differenzierbar, es bleibt zu zeigen, dass f' in 0 nicht differenzierbar ist, es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} \\
&= 2 \\
\lim_{h \to 0^-} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist f' in 0 nicht differenzierbar und f ist einmal aber nicht zweimal differenzierbar.

Betrachte nun für $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x^{k+1} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Man zeigt, dass f_k das Gewünschte leistet, d.h. k–mal, aber nicht $(k+1)$–mal differenzierbar ist durch Induktion nach k:

- Induktionsanfang: Für $k = 0$ wurde oben schon gezeit, dass f_0 $(= f'/2)$ nicht differenzierbar ist, also gilt das auch für f_0.

- Induktionsvoraussetzung: Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ sei gezeigt, dass f_k k–mal, aber nicht $(k+1)$–mal differenzierbar ist.
- Induktionsschluss: Nun ist f_{k+1} für $x \neq 0$ als Polynom differenzierbar, in $x = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{f_{k+1}(0+h) - f_{k+1}(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{k+2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} h^{k+1} \\
&= 0 \\
\lim_{h \to 0^-} \frac{f_{k+1}(0+h) - f_{k+1}(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{0}{h} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also ist f_{k+1} differenzierbar mit

$$f'_{k+1} : x \mapsto \begin{cases} (k+2)x^{k+1} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

d.h. $f'_{k+1} = (k+2)f_k$, nach Induktionsvoraussetzung, ist also f'_{k+1} weitere k–mal differenzierbar, aber nicht weitere $k+1$ Mal, d.h. es ist f_{k+1} $(k+1)$–mal, aber nicht $k+2$–mal differenzierbar.

4.1.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Null auf den irrationalen Zahlen, für (gekürzte) rationale Zahlen p/q (mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$) soll der Wert $1/q^2$ zugeordnet werden. Gibt es Punkte, an denen f differenzierbar ist?

Sie dürfen ausnutzen, dass es zu jeder irrationalen Zahl x unendlich viele rationale Zahlen p/q so gibt, dass $|x - p/q| \leq 1/q^2$.

Beh.: f ist nirgends differenzierbar.

Sei zunächst $x = p/q \in \mathbb{Q}$, wegen $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^- = \mathbb{R}$ gibt es $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$, es ist aber

$$f(x_n) = 0 \not\to f(x) = \frac{1}{q^2} > 0$$

also ist f in x nicht stetig, erst recht nicht differenzierbar.

Sei nun $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Man zeigt, dass es eine Folge $(x_n) = (p_n/q_n)$ in $\mathbb{Q}$ gibt, so dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

und $x_n \to x$ gilt.

Nach obiger Bemerkung ist

$$\left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2} \right\}$$

unendlich. Also gibt es eine streng monotone Folge (q_n) in $\mathbb{N}$ und $p_n \in \mathbb{Z}$ so dass

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

Da (q_n) streng monoton ist, folgt $q_n \geq n \to \infty$ (durch Induktion: $q_1 \in \mathbb{N}$, also $q_1 \geq 1$ und $q_{n+1} > q_n \geq n$, also wegen $q_{n+1} \in \mathbb{N}$ sicher $q_{n+1} \geq n+1$) und damit

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2} \to 0$$

d.h. $x_n := p_n/q_n \to x$.

Nun ist zunächst, da p_n, q_n nicht notwendig teilerfremd sein müssen:

$$f(x_n) = f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{1}{q_n^2/\mathrm{ggT}(p_n, q_n)^2} = \frac{\mathrm{ggT}(p_n, q_n)^2}{q_n^2} \geq \frac{1}{q_n^2}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \right| &\geq \frac{1/q_n^2}{|p_n/q_n - x|} \\ &\geq \frac{1/q_n^2}{1/q_n^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Also ist insbesondere $\big(f(x_n) - f(x)\big)/(x_n - x)$ keine Nullfolge. Für jede irrationale Folge $y_n \to x, y_n \neq x$ ist aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

also stimmt nicht für alle Folgen $z_n \to x$ der Grenzwert des Differenzenquotienten überein, d.h. f ist in x nicht differenzierbar.

4.1.3 Finden Sie eine differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, für die f' nicht stetig ist.

Betrachte $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ mit $f(0) := 0$. f ist in $x \neq 0$ sicher differenzierbar, in $x = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| &= \left| \frac{h^2 \sin(1/h)}{h} \right| \\ &= |h| \left| \sin \frac{1}{h} \right| \\ &\leq |h| \to 0, \quad h \to 0 \end{aligned}$$

Also ist f differenzierbar mit

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f' ist aber in 0 nicht stetig: Betrachte die Folge (x_n), gegeben durch $x_n := 1/(2\pi n)$, sicher ist (x_n) eine Nullfolge, aber es ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f'(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-1) = -1 \neq 0 = f'(0). \end{aligned}$$

Also ist f' in $x = 0$ nicht stetig.

zu 4.2

4.2.1 f und g seien auf $\mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktionen. Wenn dann $f'' = g''$ ist, so unterscheiden sich f und g nur durch eine Funktion der Form $a + bx$.

Betrachte zunächst f' und g'. Wegen $(f')' = (g')'$, gibt es ein $b \in \mathbb{R}$, so dass $f'(x) = g'(x) + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachte nun die Funktionen f und $h : x \mapsto g(x) + bx$, dann ist h differenzierbar mit $h' = g' + b = f'$, also unterscheiden sich f und h nur um eine Konstante $a \in \mathbb{R}$, es gilt also

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} f(x) = h(x) + a = g(x) + bx + a = g(x) + (a + bx).$$

Das war aber zu zeigen.

zu 4.3

4.3.1 Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom der Funktion f bei x_0, wenn

(a) $f(x) = \ln x$ und $x_0 = 2$ bzw.

(b) $f(x) = 1/x$ und $x_0 = 1$

und geben Sie eine Abschätzung des Fehlers, wenn man $f(x)$ für $|x - x_0| < 0.1$ durch den Wert dieses Taylorpolynoms an der Stelle x ersetzt. Berechnen Sie weiter die Taylorpolynome 2. Grades bei x_0 von

(c) $x \mapsto \sqrt[3]{1-x}$ für $x_0 = 0$ und

(d) $x \mapsto \exp(1/x)$ für $x_0 = 1$.

(a) $f(x) = \ln x, x_0 = 2$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar. Man bestimmt nun zur Bestimmung des Taylorpolynoms 3. Grades an der Stelle 2 die ersten 3 Ableitungen der Funktion f:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ f'(x) &= 1/x \\ f''(x) &= -1/x^2 \\ f'''(x) &= 2/x^3 \end{aligned}$$

Die letzen beiden Zeilen folgen wegen $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}, r \in \mathbb{R}$. Die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen an der Stelle 2 sind also:

$$f(2) = \ln 2, \quad f'(2) = \frac{1}{2}, \quad f''(2) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(2) = \frac{1}{4}.$$

Für das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \tfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 \\
&= \ln 2 + \frac{1}{2}x - 1 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} \\
&= \left(\ln 2 - \frac{11}{6}\right) + \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{24}x^3
\end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt nach dem Satz von Taylor (Restgliedformel), da ln, also f beliebig oft differenzierbar ist (also auch 4 mal), dass ein ξ zwischen $x_0 = 2$ und x existiert, also mit $|\xi - 2| < |x - 2|$, so dass

$$f(x) = p_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-2)^4.$$

Es sei $R_3(x) := f(x) - p_3(x)$. Wegen

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

gilt für $x \in \,]\,1.9, 2.1\,[$, i.e. x mit $|x - x_0| < 0.1$, dass ein ξ zwischen x und 2 existiert (also $1.9 < \xi < 2.1$), so dass

$$\begin{aligned}
|R_3(x)| &= \left|\frac{6}{\xi^4 \cdot 4!}(x-2)^4\right| \\
&\overset{\xi \geq 0}{=} \frac{6}{\xi^4 \cdot 4!}|(x-2)|^4 \\
&\overset{\xi > 1.9}{<} \frac{6}{1.9^4 \cdot 4!}|(x-2)|^4 \\
&\overset{|x-2| < 0.1}{<} \frac{6}{1.9^4 \cdot 24} \cdot 0.1^4 \\
&\approx 1.92 \cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

Also wird beim Ersetzen von $f(x)$ durch $p_3(x)$ für $|x - 2| < 0.1$ ein Fehler von höchstens $1.92 \cdot 10^{-6}$ gemacht.

(b) $f(x) = 1/x, x_0 = 1$

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$f(x) = 1/x, \quad f'(x) = -1/x^2, \quad f''(x) = 2/x^3, \quad f'''(x) = -6/x^4$$

an der Stelle $x_0 = 1$ gilt also für die Funktion f und ihre ersten drei Ableitungen:

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = -1, \quad f''(1) = 2, \quad f'''(1) = -6$$

Somit gilt für das Taylorpolynom 3. Grades an der Stelle $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \tfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &= 1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3 \\ &= 1-x+1+x^2-2x+1-x^3+3x^2-3x+1 \\ &= 4-6x+4x^2-x^3. \end{aligned}$$

Wiederum gilt nach dem Taylorschen Satz, dass für alle x mit $|x-1| < 0.1$ ein ξ zwischen x und $x_0 = 1$ existiert, so dass

$$f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4 =: R_3(x).$$

Wegen $|\xi - 1| < |x-1| < 0.1$ folgt $x, \xi \in \,]\,0.9, 1.1\,[$ weiterhin gilt

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

also gilt für alle x mit $|x-1| < 0.1$:

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &= \left|\frac{24}{\xi^5 \cdot 24}(x-1)^4\right| \\ &\overset{\xi \geq 0}{=} \frac{1}{\xi^5}|x-1|^4 \\ &\overset{\xi > 0.9}{<} \frac{1}{0.9^5}|x-1|^4 \\ &\overset{|x-1| < 0.1}{<} \frac{1}{0.9^5} \cdot 0.1^4 \\ &\approx 1.69 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Also kann der Fehler beim Ersetzen von f durch p_3 für $|x-1| < 0.1$ durch $1.69 \cdot 10^{-4}$ nach oben abgeschätzt werden.

(c) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}, x_0 = 0$

Man bestimmt zunächst die ersten beiden Ableitungen von f (f ist auf $]-\infty, 1[$ beliebig oft differenzierbar). Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{1-x} \\ f'(x) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}} \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot (1-x)^{-\frac{2}{3}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (1-x)^{-\frac{5}{3}} \cdot (-1) \\ &= -\frac{2}{9} \cdot (1-x)^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

Nun bestimmt man den Wert der Funktion und ihrer ersten beiden Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$. Es ist

$$f(0) = \sqrt[3]{1} = 1, \quad f'(0) = -\frac{1}{3}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9}.$$

Für das Taylorpolynom 2. Grades von f an der Stelle $x_0 = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &= 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \end{aligned}$$

(d) $f(x) = \exp(1/x)$

Man bestimmt zunächst die ersten drei Ableitungen von f ($f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar). Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(1/x) \\ f'(x) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} -\frac{1}{x^2} \cdot \exp(1/x) \\ f''(x) &= \frac{2}{x^3} \cdot \exp(1/x) - \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \exp(1/x) \\ &= \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \cdot \exp(1/x)\,. \end{aligned}$$

Man berechnet nun den Wert der Funktion und der ersten beiden Ableitungen an der Stelle $x_0 = 1$. Es gilt

$$f(1) = \exp(1) = \mathrm{e}, \quad f'(1) = -1 \cdot \mathrm{e} = -\mathrm{e}, \quad f''(1) = (2 + 1) \cdot \mathrm{e} = 3\mathrm{e}$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom zweiten Grades von f an der Stelle $x_0 = 1$ zu

$$\begin{aligned} p_2(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e}(x - 1) + \frac{3\mathrm{e}}{2}(x - 1)^2 \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e}x + \mathrm{e} + \frac{3\mathrm{e}}{2}x^2 - 3\mathrm{e}x + \frac{3\mathrm{e}}{2} \\ &= \frac{7\mathrm{e}}{2} - 4\mathrm{e}x + \frac{3\mathrm{e}}{2}x^2 \end{aligned}$$

4.3.2 Entwickeln Sie das Polynom $1 + 2x - 3x^3$ an der Stelle $x_0 = -1$.

Man bestimmt dazu, da $p : x \mapsto 1 + 2x - 3x^3$ dritten Grades ist, das dritte Taylorpolynom von p in x_0, die Ableitungen von p sind

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2 - 9x^2 \\ p''(x) &= -18x \\ p'''(x) &= -18 \\ p^{(4)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Im Punkte $x_0 = -1$ hat man:

$$\begin{aligned} p(-1) &= 1 - 2 + 3 = 2 \\ p'(-1) &= 2 - 9 = -7 \\ p''(-1) &= 18 \\ p'''(-1) &= -18 \end{aligned}$$

Wegen $p^{(4)} \equiv 0$ verschwindet das Restglied, es gilt also:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{p'''(x_0)}{6}(x - x_0)^3 \\ &= 2 - 7(x+1) + 9(x+1)^2 - 3(x+1)^3. \end{aligned}$$

zu 4.4

4.4.1 Bestimmen Sie die Konvergenzradien von

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+n}{n^2} x^n, \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \text{ und} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n, a \in \mathbb{R}.$$

(a) Es sei $a_n := \frac{n^3+n}{n^2}$, dann gilt für diese Reihe $R_a = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, da dieser Grenzwert existiert:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+n)/n^2}{\big((n+1)^3 + (n+1)\big)/(n+1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+n)(n+1)^2}{n^2[(n+1)^3 + (n+1)]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1+1/n^2)\cdot n^2(1+1/n)^2}{n^2\cdot n^3[(1+1/n)^3 + 1/n^2 + 1/n^3]} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n^2)\cdot(1+1/n)^2}{(1+1/n)^3 + 1/n^2 + 1/n^3} \\ &\overset{\text{GWS}}{=} \frac{(1+\lim_{n\to\infty} 1/n^2)\cdot(1+\lim_{n\to\infty} 1/n)^2}{(1+\lim_{n\to\infty} 1/n)^3 + \lim_{n\to\infty} 1/n^2 + \lim_{n\to\infty} 1/n^3} \\ &= \frac{(1+0)\cdot(1+0)^2}{(1+0)^3 + 0 + 0} = 1. \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist also $R_a = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$.

(b) Auch für diese Reihe existiert obiger Grenzwert, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| &= \lim_{n\to\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)![(n+1)!]^2}{(n!)^2(2n+2)!} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1+1/n)^2}{n(2+1/n)\cdot n(2+2/n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^2}{(2+1/n)\cdot(2+2/n)} \\
&\overset{\text{GWS}}{=} \frac{(1+\lim_{n\to\infty}1/n)^2}{(2+\lim_{n\to\infty}1/n)\cdot(2+\lim_{n\to\infty}2/n)} \\
&= \frac{(1+0)^2}{(2+0)\cdot(2+0)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Also ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe $R_a = \frac{1}{4}$.

(c) Bei dieser Reihe unterscheidet man drei Fälle ($b_n := a^{n^2}$):

- $|a| < 1$

  In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|^{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}|a|^n \\
&\overset{|a|<1}{=} 0.
\end{aligned}$$

  Es folgt: $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} = 0$ und damit $R_a = +\infty$.

- $|a| = 1$

  In diesem Fall gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \text{also} \quad R_a = 1.$$

- $|a| > 1$

  In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|} &= \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|^{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty}|a|^n \\
&\overset{|a|>1}{=} +\infty.
\end{aligned}$$

Es folgt: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = +\infty$ und damit $R_a = 0$.

4.4.2 Man zeige, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und alle ihre Ableitungen im Nullpunkt verschwinden.

Tipp: Zunächst sollte man zeigen, dass für $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-1/x^2}$$

gilt, wobei p_n ein geeignetes Polynom ist.

Als erstes zeigt man zur Vorbereitung, dass: Für jedes Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} p(x)\cdot \mathrm{e}^{-x} = 0$$

Beweis:
Sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbb{R}$$

ein Polynom n-ten Grades. Sei $x > 0$ beliebig, dann gilt

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \overset{x>0}{>} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \left|p(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}\right| &= \left|\frac{p(x)}{\mathrm{e}^x}\right| \\ &< \left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^{n+1}/(n+1)!}\right| \\ &= \left|(n+1)!\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-(n+1)}\right| \\ &\overset{x>0}{\leq} (n+1)!\cdot\sum_{k=0}^{n} |a_k| x^{k-(n+1)}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt wegen

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n} |a_k| x^{k-(n+1)} \overset{\text{GWS}}{=} \sum_{k=0}^{n}\left(|a_k| \lim_{x\to\infty} x^{k-(n+1)}\right) = \sum_{k=0}^{n}(|a_k|\cdot 0) = 0.$$

Als Nächstes zeigt man, dass

$$\lim_{x\to\infty} p(x)\cdot \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

für alle Polynome p ist.
Für $x > 1$ ist $x < x^2$, also $-x^2 < -x$, es folgt

$$\left|p(x)\cdot \mathrm{e}^{-x^2}\right| \overset{x\geq 1}{\leq} \left|p(x)\cdot \mathrm{e}^{-x}\right|$$

und aus obigem dann die Behauptung. Analog ergibt sich

$$\lim_{x\to-\infty} p(x)\cdot \mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

Ersetzt man in den letzten beiden Gleichungen x durch $1/\xi$ (dies ist möglich, da der Grenzwert gegen $\pm\infty$ betrachtet wird, so folgt

$$\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi>0}} p(1/\xi)\cdot \mathrm{e}^{-1/\xi^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{\xi\to 0\\ \xi<0}} p(1/\xi)\cdot \mathrm{e}^{-1/\xi^2} = 0$$

Aus der Existenz dieser beiden Funktionsgrenzwerte folgt

$$\lim_{\xi\to 0} p(1/\xi)\cdot \mathrm{e}^{-1/\xi^2} = 0$$

für alle Polynome p.

Man zeigt nun durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (hierbei sei $f^{(0)} = f$) gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)\cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0,\ p_n \text{ ein geeignetes Polynom} \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

- Induktionsanfang:
  Für $n = 0$ gilt die Behauptung mit $p_0(x) = 1$ nach der Definition von f.

- Induktionsvoraussetzung:
  Für ein $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ gelte:

  $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)\cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0,\ p_n \text{ ein geeignetes Polynom} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- Induktionsschluss:
  Zu zeigen ist, dass $f^{(n)}$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit

  $$f^{(n+1)}(x) = \begin{cases} p_{n+1}(1/x)\cdot \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0,\ p_{n+1} \text{ ein Polynom} \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

  Sei also $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, sei zunächst $x_0 \neq 0$. $f^{(n)}$ ist als Kompositum auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar bei x_0. Die Ableitung erhält man durch Anwendung der Ketten- und der Produktregel:

  $$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0) &= p_n(1/x_0)\cdot \mathrm{e}^{-1/x_0^2} \\ \Rightarrow f^{(n+1)}(x_0) &= p_n'(1/x_0)\cdot\left(-\frac{1}{x_0^2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-1/x_0^2} \\ &\qquad + p_n(1/x_0)\cdot \mathrm{e}^{-1/x_0^2}\cdot\frac{2}{x_0^3} \\ &= \left(\frac{2}{x_0^3}\,p_n(1/x_0) - \frac{1}{x_0^2}\,p_n'(1/x_0)\right)\cdot \mathrm{e}^{-1/x_0^2}. \end{aligned}$$

Man setze nun

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \; p_{n+1}(x) := 2x^3 \cdot p_n(x) - x^2 \cdot p_n'(x).$$

Da nach Induktionsvoraussetzung p_n und damit auch p_n' Polynome sind, ist offenbar auch p_{n+1} ein Polynom. Für $x = \frac{1}{x_0}$ gilt:

$$p_{n+1}(1/x_0) = \frac{2}{x_0^3} \cdot p_n(1/x_0) - \frac{1}{x_0^2} \cdot p_n'(1/x_0)$$

Damit folgt weiter

$$f^{(n+1)}(x_0) = p_{n+1}(1/x_0) \cdot \mathrm{e}^{-1/x_0^2}$$

Zu betrachten bleibt noch $x_0 = 0$, zu zeigen ist, dass $f^{(n)}$ bei 0 mit $f^{(n+1)}(0) = 0$ differenzierbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} &\overset{\text{Ind.Vor}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{p_n(1/h) \cdot \mathrm{e}^{-1/h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{p_n(1/h)}{h} \cdot \mathrm{e}^{-1/h^2} \end{aligned}$$

Man definiert nun $\tilde{p}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{p}_n(x) := x \cdot p_n(x)$. Also ist $\tilde{p}_n$ auch ein Polynom und es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{p_n(1/h)}{h} \cdot \mathrm{e}^{-1/h^2} \\ &= \lim_{h\to 0} \tilde{p}_n(1/h) \cdot \mathrm{e}^{-1/h^2} \\ &\overset{\text{s.o.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Also ist $f^{(n+1)}(0) = 0$, das war aber zu zeigen.

f ist also auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und im Nullpunkt verschwinden alle Ableitungen.

4.4.3 Sei (a_n) eine Folge in $\hat{\mathbb{R}}$. Man beweise, dass

$$\limsup a_n = \inf_m \sup_{n\geq m} a_n.$$

Es sei $a := \inf_m \sup_{n\geq m} a_n \in \hat{\mathbb{R}}$, man unterscheidet drei Fälle:

- $a = +\infty$: Zu zeigen ist, dass $\limsup a_n = +\infty$, d.h. dass es eine gegen $+\infty$ konvergente Teilfolge gibt. Man wählt induktiv eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \geq k$, diese leistet sicher das gewünschte:

  Zunächst ist $a = \inf_m \sup_{n\geq m} a_n = +\infty$, also ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ sicher $\sup_{n\geq m} a_n = +\infty$, insbesondere gibt es $n_1 \geq 1$, so dass $a_{n_1} \geq 1$. Damit ist n_1 gewählt. Sei nun n_k bereits gewählt, wähle wegen $\sup_{n\geq n_k+1} a_n = +\infty$ ein $n_{k+1} > n_k$ mit $a_{n_{k+1}} \geq k+1$.

  Nun ist $\lim a_{n_k} = +\infty$, damit ist $\limsup a_n = +\infty = a$.

- $a \in \mathbb{R}$: Zu zeigen ist $\limsup a_n = a$, man zeigt zunächst, dass für $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder $\geq a + \varepsilon$ sind.

  Sei also $\varepsilon > 0$. Nun ist $a + \varepsilon > \inf_m \sup_{n \geq m} a_n$, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a + \varepsilon > \sup_{n \geq m} a_n$, d.h. für alle $n \geq m$ ist $a + \varepsilon > a_n$, also sind höchstens die $m - 1$ Folgenglieder a_k mit $1 \leq k \leq m - 1$ größer als $a + \varepsilon$.

  Nun zeigt man noch, dass für $\varepsilon > 0$ stets unendlich viele Folgenglieder $\geq a - \varepsilon$ sind: Sei $\varepsilon > 0$, dann ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ sicher

$$a - \varepsilon < a = \inf_m \sup_{n \geq m} a_n \leq \sup_{n \geq m} a_n$$

  d.h. zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \geq m$ mit $a_n \geq a - \varepsilon$, insbesondere sind unendlich viele $a_n \geq a - \varepsilon$.

  Zusammen ist damit, da der limes superior durch diese Eigenschaften charakterisiert wird, gezeigt, dass $a = \limsup a_n$.

- $a = -\infty$: Man zeigt, dass dann notwendig $\lim a_n = -\infty$ gilt, denn dann ist auch $\limsup a_n = -\infty$.

  Sei also $R \in \mathbb{R}$ beliebig, wegen

$$-\infty = \inf_m \sup_{n \geq m} a_n < R$$

  gibt es $m \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_{n \geq m} a_n < R$, d.h. $a_n < R$ für alle $n \geq m$, da $R \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt $a_n \to -\infty$.

Stets gilt $a = \limsup a_n$, das war aber zu zeigen.

zu 4.5

4.5.1 Berechnen Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$ (man nennt sie die sechsten Einheitswurzeln) und zeigen Sie, dass sie die Ecken eines regulären Sechsecks bilden.

Zunächst schreibt man $z = r\mathrm{e}^{i\phi}$ und $1 = 1\mathrm{e}^{2i\pi n}$, man erhält:

$$z^6 = r^6 \mathrm{e}^{6i\phi}$$

also liefert Koordinatenvergleich:

$$z^6 = 1 \iff r^6 = 1 \wedge 6i\phi = 2i\pi n$$

es folgt $r = 1$ (da $r \geq 0$), und man erhält für $0 \leq n \leq 5$ die Winkel

$$\phi_n := \frac{\pi n}{3}$$

Die 6. Einheitswurzeln $\zeta_n := \mathrm{e}^{i\phi_n}$ sind also

$$\begin{aligned}
\zeta_0 &= \mathrm{e}^{i0} = \mathrm{e}^0 = 1 \\
\zeta_1 &= \mathrm{e}^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\zeta_2 &= \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\zeta_3 &= \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \\
\zeta_4 &= \mathrm{e}^{4i\pi3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\
\zeta_5 &= \mathrm{e}^{5i\pi3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass sie die Ecken eines regelmäßigen Sechsecks bilden, zeigt man, dass

$$\forall_{0\leq k\leq 5} |\zeta_k - \zeta_{k+1}| = 1$$

(dann bilden nämlich je ζ_k, ζ_{k+1} mit dem Nullpunkt ein regelmäßiges Dreieck und sechs solche bilden ein regelmäßiges Schechseck), dabei ist

$$\zeta_6 := \mathrm{e}^{6i\pi3} = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1 = \zeta_0$$

Sei also $0 \leq k \leq 5$, es ist

$$\begin{aligned}
|\zeta_k - \zeta_{k+1}| &= \left|\mathrm{e}^{ki\pi/3} - \mathrm{e}^{(k+1)i\pi/3}\right| \\
&= \left|\mathrm{e}^{ki\pi/3} \cdot (1 - \mathrm{e}^{i\pi/3})\right| \\
&= \left|1 - \mathrm{e}^{i\pi/3}\right| \\
&= \left|1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \\
&= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

4.5.2 Beweisen Sie das Additionstheorem für die Tangensfunktion: Wann immer $\tan\alpha$, $\tan\beta$ und $\tan(\alpha+\beta)$ definiert sind, gilt

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Seien also $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ so, dass $\tan\alpha, \tan\beta$ und $\tan(\alpha+\beta)$ defniert sind. Dann ist also $\cos\alpha, \cos\beta \neq 0$ und $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$, es folgt

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &\overset{\text{Def von tan}}{=} \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} \\
&\overset{\cos\alpha\cos\beta\neq 0}{=} \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\
&= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

4.5.3 Man finde alle komplexen Zahlen z mit

(a) $z^2 - z + 1 = 0$,

(b) $z^7 = 5$,

(c) $z^{15} = -z^6$.

(a) $z^2 - z + 1 = 0$

Es gibt höchstens zwei $z \in \mathbb{C}$, die diese Gleichung erfüllen, mit Hilfe der p-q-Formel folgt wegen $1/4 - 1 < 0$:

$$\begin{aligned}
z^2 - z + 1 &= 0 \\
\iff z_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm i \cdot \sqrt{\left|\frac{1}{4} - 1\right|} \\
&= \frac{1}{2} \pm i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$\iff z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \quad \vee \quad z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

(b) $z^7 = 5$

$z = 0$ ist keine Lösung dieser Gleichung, da $0^7 = 0 \neq 5$ ist. Sei also $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Gleichung $z^7 = 5$ und sei $z = r \cdot \mathrm{e}^{ix}$ mit $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Wegen $5 = 5 \cdot \mathrm{e}^{i\cdot 2k\pi}$ f.a. $k \in \mathbb{Z}$ folgt, dass $z_k \in \mathbb{C}$ mit

$$z_k = \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{2k\pi}{7}}$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}$ Lösung der Gleichung $z^7 = 5$ ist.

Nun ist aber für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$z_{k+7} = \sqrt[7]{5} \cdot e^{i\cdot(\frac{2k\pi}{7}+2\pi)} = \sqrt[7]{5} \cdot e^{i\cdot\frac{2k\pi}{7}} = z_k$$

Also gibt es 7 verschiedene Lösungen der Gleichung $z^7 = 5$, nämlich

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot 0} = \sqrt[7]{5} \\
z_1 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{2}{7}\pi} \\
z_2 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{4}{7}\pi} \\
z_3 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{6}{7}\pi} \\
z_4 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{8}{7}\pi} \\
z_5 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{10}{7}\pi} \\
z_6 &= \sqrt[7]{5} \cdot \mathrm{e}^{i\cdot\frac{12}{7}\pi}
\end{aligned}$$

(c) $z^{15} = -z^6$

Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
z^{15} &= -z^6 \\
\Longleftrightarrow z^{15} + z^6 &= 0 \\
\Longleftrightarrow z^6 \cdot (z^9 + 1) &= 0 \\
\Longleftrightarrow z^6 = 0 &\vee z^9 = -1 \\
\Longleftrightarrow z = 0 &\vee z^9 = -1
\end{aligned}$$

Zunächst ist also $z = 0$ Lösung der Gleichung. Sei nun $z = r \cdot \mathrm{e}^{ix} \in \mathbb{C}$ mit $r > 0, x \in \mathbb{R}$ Lösung von $z^9 = -1$. Analog zu (b) folgt, dass z dann die Form

$$z = \mathrm{e}^{i\cdot\frac{\pi+2k\pi}{9}} = \mathrm{e}^{i\cdot(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{9})}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$ hat. Die sich ergebenden 9 verschiedenen Lösungen sind also

$$\begin{aligned}
z_0 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{1}{9}\pi} \\
z_1 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{3}{9}\pi} \\
z_2 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{5}{9}\pi} \\
z_3 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{7}{9}\pi} \\
z_4 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{9}{9}\pi} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1 \\
z_5 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{11}{9}\pi} \\
z_6 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{13}{9}\pi} \\
z_7 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{15}{9}\pi} \\
z_8 &= \mathrm{e}^{i\cdot\frac{17}{9}\pi}
\end{aligned}$$

4.5.4 Man zeige:

(a) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\ f(x) = \mathrm{e}^{ix}$ gilt die Aussage des Satzes von Rolle nicht.

(b) Die L'Hôpitalschen Regeln gelten für komplexwertige Funktionen nicht: Als Beispiel setze man $f :]\,0,1\,] \to \mathbb{C}$, $f(x) = x$, $g :]\,0,1\,] \to \mathbb{C}$, $g(x) = x + x^2 \exp(i/x^2)$ und berechne unter Beachtung von $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(a) Es ist $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = \mathrm{e}^{2\pi i} = f(2\pi)$. Gälte die Aussage des Satzes von Rolle für f, so müßte ein $\xi \in\,]\,0, 2\pi\,[$ existieren, so dass $f'(\xi) = 0$ ist.

Es ist aber für beliebiges $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |f'(x)|^2 &= \left|i\mathrm{e}^{ix}\right|^2 \\ &= |i|^2 \cdot \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Also ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Aussage des Satzes von Rolle gilt also für f nicht.

(b) Es seien $f, g\colon]\,0,1\,] \to \mathbb{C}$ wie oben definiert. Offenbar ist

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x + x^2\exp(i/x^2)} \quad \overset{x\neq 0}{=} \quad \frac{1}{1 + x\exp(i/x^2)}$$

Weiterhin ist für $x \in\,]\,0,1\,]$:

$$\left|x\exp(i/x^2)\right| = |x| \cdot \left|\exp(i/x^2)\right| = |x|$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ folgt $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} x \cdot \exp(i/x^2) = 0$ und die Anwendung der Grenzwertsätze ergibt:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + x\cdot\exp(i/x^2)} \\ &\overset{\text{GWS}}{=} \frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\exp(i/x^2)} \\ &= \frac{1}{1+0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestimmt man zunächst die Ableitungen von f und g:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ \Rightarrow f'(x) &= 1 \\ g(x) &= x + x^2 \cdot \exp(i/x^2) \\ \Rightarrow g'(x) &= 1 + 2x\cdot\exp(i/x^2) + x^2\cdot\exp(i/x^2)\cdot(-2i/x^3) \\ &= 1 + \exp(i/x^2)\cdot(2x - 2i/x) \end{aligned}$$

Man zeigt als nächstes, dass

$$\bigvee_{R>0} \coprod_{x_0 \in]\,0,1\,]} |g'(x_0) - 1| \geq R$$

Sei $R > 0$ beliebig, wähle $x_0 := \min\{1, 2/R\}$ dann ist

$$\begin{aligned}
|g'(x_0) - 1| &= \left|\exp(i/x_0^2)\right| \cdot |2x_0 - 2i/x_0| \\
&= |2x_0 - 2i/x_0| \\
&\geq \frac{2}{|x_0|} \\
&\geq \frac{2}{2/R} \\
&= R
\end{aligned}$$

Man zeigt nun noch, dass $\chi : x \to |g'(x) - 1|^2$ auf $]\,0, 1\,]$ monoton fällt, dazu bestimmt man nun die Ableitung:

$$\begin{aligned}
\chi'(x) &= \left(4x^2 + \frac{4}{x^2}\right)' \\
&= 8x - \frac{8}{x^3} \\
&= 8 \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

Für $x \in \,]\,0, 1\,]$ ist $x^3 \leq 1$, also $1/x^3 \geq 1$ und $x \leq 1$ und somit $\chi'(x) = 8 \cdot (x - 1/x^3) \leq 0$, somit fällt χ und wegen der Monotonie der Quadratwurzelfunktion auch $|g'(x) - 1|$ monoton auf $]\,0, 1\,]$.

Sei nun (x_n) eine Nullfolge in $]\,0, 1\,]$, zu zeigen ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g'(x_n)} = 0$$

Es reicht zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} g'(x_n) = \infty \quad (\text{in } \hat{\mathbb{C}}\,)$$

dies ist aber Gleichwertig mit

$$\lim_{n\to\infty} (g'(x_n) - 1) = \infty$$

also

$$\bigvee_{R>0} \coprod_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigvee_{n \geq n_0} |g'(x_n) - 1| \geq R$$

Sei $R > 0$, wähle (s.o.) $x_0 \in \,]\,0, 1\,]$ mit $|g'(x_0) - 1| > R$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n < x_0$ f.a. $n \geq n_0$ (x_n ist Nullfolge), es folgt für alle $n \geq n_0$, da $|g'(x) - 1|$ auf $]\,0, 1\,]$ monoton fällt:

$$|g'(x_n) - 1| \overset{x_n < x_0}{\geq} |g'(x_0) - 1| > R$$

Also ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = 0$$

Das war aber zu zeigen.

Also gilt die Regel von l'Hôpital für komplexe Funktionen im Allgemeinen nicht, denn es ist

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

zu 4.6

4.6.1 Man zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\,.$$

Tipp: $\cos x = (\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})/2$, $\sin x = (\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})/2i$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\ell\pi \ell \in \mathbb{Z}\}$ beliebig. Dann ist $\mathrm{e}^{ix} \neq 1$, $\mathrm{e}^{-ix} \neq 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ikx} + \mathrm{e}^{-ikx})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx} + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-ikx}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{ix}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-ix}\right)^k \\
&\overset{\mathrm{e}^{\pm ix} \neq 1}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mathrm{e}^{ix}\right)^{n+1} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\mathrm{e}^{-ix}\right)^{n+1} - 1}{\mathrm{e}^{-ix} - 1} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{i(n+1)x} - 1}{\mathrm{e}^{ix} - 1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1 - \mathrm{e}^{-i(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{-ix}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-i(n+1)x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-ix}{2}}} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{-i(n+1)x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{-ix}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-i(n+1)x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-ix}{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{inx}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{-inx}{2}}\right)\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)x}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-i(n+1)x}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{ix}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{-ix}{2}}} \\
&= \cos(nx/2)\cdot\frac{2\sin((n+1)x/2)}{2\sin(x/2)} \\
&= \frac{\cos(nx/2)\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

Im Fall $x \in \{2\ell\pi \ell \in \mathbb{Z}\}$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx) = n + 1$.

4.6.2 Sei $l > 0$ gegeben. Für welche Zahlen $k > 0$ besitzt $y'' + k^2 y = 0$ eine nicht triviale Lösung mit den *Randwerten*

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad ?$$

(Das kleinste derartige k bestimmt die so genannte *Eulersche Knicklast*; bei dieser kann ein einseitig eingespannter Stab der Länge l ausknicken.)

Aus der Differenzialgleichung $y'' + k^2 y = 0$ erhält man mit Hilfe des Exponentialansatzes ihr charakteristisches Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 + k^2 = 0$$

Man bestimmt nun mit Hilfe der p-q-Formel seine Nullstellen:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + k^2 &= 0 \\ \iff \lambda_{1,2} &= 0 \pm i \cdot \sqrt{|0 - k^2|} \\ \iff \lambda_1 = k \cdot i \quad &\vee \quad \lambda_2 = -k \cdot i \end{aligned}$$

Man erhält also als Basis des Lösungsraumes obiger Differenzialgleichung

$$\{\sin(k \cdot x), \cos(k \cdot x)\}$$

Also ist die allgemeine Lösung ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sind bel. Konstanten):

$$y(x) = c_1 \cdot \sin(k \cdot x) + c_2 \cdot \cos(k \cdot x)$$

Man ermittelt nun aus den Randwerten die Werte der Konstanten:

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= c_1 \cdot \sin(k \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(k \cdot 0) \\ \iff 0 &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 \\ \iff c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Mit dem anderen Randwert erhält man wegen $c_2 = 0$ und

$$y'(x) = kc_1 \cdot \cos(k \cdot x)$$

$$\begin{aligned} 0 = y'(\ell) &= kc_1 \cdot \cos(k \cdot \ell) \\ \iff 0 &= kc_1 \cdot \cos(k\ell) \\ \overset{k>0}{\iff} \quad c_1 = 0 \quad &\vee \quad \cos(k\ell) = 0 \\ \overset{k>0,\,\ell>0}{\iff} \quad c_1 = 0 \quad &\vee \quad \exists_{m \in \mathbb{N}_0}\ k\ell = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \overset{\ell>0}{\iff} \quad c_1 = 0 \quad &\vee \quad \exists_{m \in \mathbb{N}_0}\ k = \frac{\pi}{2\ell} + \frac{m\pi}{\ell} \end{aligned}$$

Im Fall $c_1 = 0$ ergibt sich die triviale Lösung $y(x) \equiv 0$, nicht triviale Lösungen existieren also nur für $k > 0$ der Form

$$k = \frac{\pi}{2\ell} + \frac{m\pi}{\ell} \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}_0$$

das kleinste derartige k ist $k_{\min} = \frac{\pi}{2\ell}$.

4.6.3 Man zeige:

(a) Ist $x \neq 0$ eine algebraische Zahl, so auch $1/x$ und $x+q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

(b) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ist algebraisch.

(Allgemein kann man zeigen, dass die Menge der algebraischen Zahlen ein Körper ist.)

(a) Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ algebraisch, und seien $n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{Z}$ für $0 \leq k \leq n$ so gewählt, dass

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$$

Wegen $x \neq 0$ ist auch $x^n \neq 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= 0 \\ \Longleftrightarrow \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k &= 0 \\ \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n} &= 0 \\ \overset{\kappa = n-k}{\Longleftrightarrow} \sum_{\kappa=0}^{n} a_{n-\kappa} x^{-\kappa} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \sum_{\kappa=0}^{n} a_{n-\kappa} \left(\frac{1}{x}\right)^{\kappa} &= 0 \end{aligned}$$

Also ist auch $1/x$ Nullstelle eines Polynoms mit ganzen Koeffizienten, nämlich von

$$\sum_{\kappa=0}^{n} a_{n-\kappa} y^{\kappa}$$

und damit eine algebraische Zahl.
Sei nun $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$ algebraisch und $p = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit rationalen $a_k \in \mathbb{Q}$, so dass $p(x) = 0$. Betrachte nun $r(x) := p(x-q)$, es ist

$$\begin{aligned} r(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-q)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i (-q)^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=i}^{n} a_k \binom{k}{i} (-q)^{k-1} \right)}_{\in \mathbb{Q}} x^i \end{aligned}$$

Also ist r ein rationales Polynom und wegen $r(x+q) = p(x+q-q) = p(x) = 0$ ist $x+q$ algebraisch.

(b) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ist algebraisch.

Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto (x^3 - 11x)^2 - 72$$

f ist ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, und es ist

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}+\sqrt{5}) &= \left[\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^3 - 11\sqrt{2} - 11\sqrt{5}\right]^2 - 72 \\ &= \left(2\sqrt{2}+6\sqrt{5}+15\sqrt{2}+5\sqrt{5}-11\sqrt{2}-11\sqrt{5}\right)^2 - 72 \\ &= \left(6\sqrt{2}\right)^2 - 72 \\ &= 72 - 72 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ algebraisch.

4.6.4 $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt n-fache Nullstelle des Polynoms P, wenn es ein Polynom Q mit $P(z) = (z - z_0)^n Q(z)$ gibt.

(a) z_0 ist genau dann n-fache Nullstelle von P, wenn gilt:

$$P(z_0) = P'(z_0) = \ldots = P^{(n-1)}(z_0) = 0.$$

(b) P habe reelle Koeffizienten. Dann gilt für $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$P(z_0) = 0 \Longleftrightarrow P(\overline{z_0}) = 0.$$

(c) Ein Polynom $\neq 0$ mit reellen Koeffizienten zerfällt in ein Produkt aus Polynomen (über $\mathbb{R}$) vom Grad ≤ 2:

$$P(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_r)(x^2 + A_1 x + B_1)\cdots(x^2 + A_s x + B_s)$$

(alle $x_i, A_i, B_i \in \mathbb{R}$).

(a) Sei P ein Polynom über $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ Sei also $z_0 \in \mathbb{C}$ eine n-fache Nullstelle von P und sei Q so gewählt, dass $P(z) = (z - z_0)^n Q(z)$.
z.Z: $P(z_0) = P'(z_0) = \cdots = P^{(n-1)}(z_0) = 0$.
Man zeigt zunächst durch vollständige Induktion nach k, dass für $0 \leq k \leq n$ die k-te Ableitung von P gerade

$$P^{(k)}(z) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k-\ell)}(z)$$

ist:

* Induktionsverankerung: Für $k = 0$ gilt:

$$P(z) = \binom{0}{0}\frac{n!}{n!}(z - z_0)^n Q^{(0-0)}(z) = (z - z_0)^n Q(z)$$

Diese Aussage ist n.V. wahr.

* Induktionsvoraussetzung: Für ein k mit $0 \le k < n$ gelte

$$P^{(k)}(z) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k-\ell)}(z)$$

* Induktionsschluß: Zu zeigen ist, dass dann für $0 < k+1 \le n$ gilt:

$$P^{(k+1)}(z) = \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z)$$

Es ist $P^{(k+1)} = \left[P^{(k)}\right]'$. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung folgt:

$$\begin{aligned}
P^{(k+1)}(z) &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(n-\ell)(z - z_0)^{n-\ell-1} Q^{(k-\ell)}(z) \\
&\qquad + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell-1)!}(z - z_0)^{n-\ell-1} Q^{(k-\ell)}(z) \\
&\qquad + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k+1} \binom{k}{\ell-1} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z) \\
&\qquad + \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z)
\end{aligned}$$

Man betrachte nun für $0 \le k < n$ die k-te Ableitung von P an der Stelle z_0:

$$\begin{aligned}
P^{(k)}(z_0) &= \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{n!}{(n-\ell)!}(z_0 - z_0)^{n-\ell} Q^{(k+1-\ell)}(z_0) \\
&\overset{\ell \le k < n!}{=} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{n!}{(n-\ell)!} \cdot 0 \cdot Q^{(k+1-\ell)}(z_0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Also verschwinden an der Stelle z_0 die ersten $n-1$ Ableitungen von P. Das war aber zu zeigen.

$\Longleftarrow$ Man zeigt dies durch logische Umkehr, i.e. man zeigt:

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ keine } n\text{-fache Nullstelle von } P \Rightarrow \underset{0\le k\le n-1}{\exists} P^{(k)} \neq 0$$

Sei also $z_0 \in \mathbb{C}$ keine n-fache Nullstelle von P, o.B.d.A. sei aber z mindestens einfache Nullstelle von P (im Fall $P(z_0) \neq 0$ folgt die Behauptung mit $k = 0$), sei also $1 \le r \le n-1$ so gewählt, dass z_0 r-fache, aber nicht $r+1$-fache Nullstelle ist, dann läßt sich also P in der Form

$$P(z) = (z-z_0)^r \cdot Q(z) \quad \text{mit } Q(z_0) \neq 0$$

schreiben.

Wie oben gezeigt, gilt dann für die r-te Ableitung von P:

$$P^{(r)}(z) = \sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} \frac{r!}{(r-\ell)!}(z-z_0)^{r-\ell} Q^{r-\ell}(z)$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} P^{(r)}(z_0) &= Q(z_0) + \sum_{\ell=0}^{r-1} \binom{r}{\ell} \frac{r!}{(r-\ell)!}(z_0-z_0)^{r-\ell} Q^{r-\ell}(z_0) \\ &= Q(z_0) \\ &\neq 0 \quad \text{(Wahl von } r) \end{aligned}$$

Man wählt also $k := r$, wegen $r \le n-1$ folgt die Behauptung.

Das war aber zu zeigen.

(b) Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned} P(z_0) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k &= 0 \\ \Longleftrightarrow \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k} &= \overline{0} = 0 \\ \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z_0}^k &= 0 \\ \overset{a_k \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z_0}^k &= 0 \\ \Longleftrightarrow P(\overline{z_0}) &= 0 \end{aligned}$$

Das war aber zu zeigen.

(c) Sei P ein Polynom n-ten Grades über $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist, kann P auch als Polynom über $\mathbb{C}$ aufgafasst werden. Nach dem Hauptsatz der Algebra zerfällt P über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren, i.e. es gilt

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - z_k), \quad z_k \in \mathbb{C}$$

Da P reele Koeffizienten hat, ist nach (b) mit jeder nicht reinrellen Nullstelle z_i auch $\overline{z_i}$ Nullstelle von P. Daher kann P als

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{\kappa=1}^{s} (z - x_\kappa) \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (z - z_\tau)(z - \overline{z_\tau}) \qquad \text{mit } x_\kappa \in \mathbb{R}, z_\tau \in \mathbb{C}$$

geschrieben werden. Also ist

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n \cdot \prod_{\kappa=1}^{s} (z - x_\kappa) \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (z^2 - (z_\tau + \overline{z_\tau})z + z_\tau \overline{z_\tau} \\ &= a_n \cdot \prod_{\kappa=1}^{s} (z - x_\kappa) \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (z^2 - 2\Re(z_\tau) + |z_\tau|^2) \end{aligned}$$

Setzt man nun für $\tau = 1, \ldots, t$: $A_\tau := -2\Re(z_\tau) \in \mathbb{R}$ und $B_\tau := |z_\tau|^2 \in \mathbb{R}$, so erhält man

$$P(z) = a_n \cdot \prod_{\kappa=1}^{s} (z - x_\kappa) \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (z^2 + A_\tau z + B_\tau)$$

d.h. P zerfällt über $\mathbb{R}$ in Polynome höchstens zweiten Grades.

4.6.5 Man betrachte das Anfangswertproblem (AWP)

$$y'' = y, \quad y(0) = y_0.$$

(a) Was kann man (ohne die Differentialgleichung zu lösen!) qualitativ über den Verlauf von y in der Nähe von $(0, y_0)$ sagen, wenn y_0 gleich 1, 0 bzw. -1 ist?

(b) Man löse das AWP für allgemeines y_0.

(a)
- Im Fall $y(0) = y_0 = -1$ ist wegen $y'' = y$ auch $y''(0) = -1$, also ist fällt die Ableitung von $y(x)$ in einer Umgebung von 0 streng monoton, daher ist der Graph von $y(x)$ im Punkte $(0, -1)$ und in einer Umgegbung dieses Punktes rechtsgekrümmt.
- Im Fall $y(0) = y_0 = 0$ ist also auch $y''(0) = 0$, also ist der Graph der Funktion $y(x)$ im Punkt $(0, 0)$ nicht gekrümmt. Links bzw. rechts des Punktes $(0, 0)$ kann der Graph von y links- oder rechtsgekrümmt sein, darüber läßt sich in diesem Fall nichts aussagen.
- Im Fall $y(0) = y_0 = 1 = y''(0)$ steigt die Ableitung in einer Umgebung von 0 streng monoton, also ist der Graph von $y(x)$ in einer Umgebung von $(0, 1)$ linksgekrümmt.

(b) Zur Lösung der Differentialgleichung bestimmt man zunächst ihr charakteristisches Polynom, man erhält

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

dieses Polynom hat offensichtlich die beiden Nullstellen $1, -1$. Als Basis der Lösungsraumes der o.a. Differentialgleichung erhält man

$$\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}\}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist also (dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ bel. Konstanten):

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^{-x}$$

Man bestimmt nun mit Hilfe der gegebenen Anfangsbedingung eine Beziehung zwischen a und b:

$$\begin{aligned} y_0 = y(0) &= a\mathrm{e}^0 + b\mathrm{e}^0 \\ \iff y_0 &= a + b \\ \iff b &= y_0 - a \end{aligned}$$

Eine Lösung des AWP ist also für bel. $a \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = a\mathrm{e}^x + (y_0 - a)\mathrm{e}^{-x} = y_0\mathrm{e}^{-x} + a(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$$

4.6.6 Finden Sie alle y mit $y' = x^3y^4$.

Man bestimmt die Lösungen nach dem bekannten Schema: Die gegebene Gleichung ist von der Form $y' = g(x)h(y)$, man bestimmt also zunächst G, H mit $G' = g$ und $H' = 1/h$ und muss dann $G(x) + c = H(y)$ nach y auflösen.

Offenbar leisten $G : x \mapsto x^4/4$ und $H : y \mapsto -1/3y^3$ das gewünschte, und es gilt:

$$\frac{x^4}{4} + c = -\frac{1}{3y^3} \iff y^3 = -\frac{4}{3x^4 + 12c} \iff y = \sqrt[3]{-\frac{4}{3x^4 + 12c}}.$$

Die Probe liefert:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3x^4 + 12c}\right)^{-2/3} \cdot \frac{12x^3 \cdot 4}{(3x^4 + 12c)^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot y^{-2} \cdot 3x^3 \cdot y^6 \\ &= x^3y^4. \end{aligned}$$

Weiterhin ist auch $y = 0$ Lösung dieser Gleichung.