Lösungen der Übungsaufgaben von Kapitel 3

zu 3.1

3.1.1 Bestimmen Sie den Abschluss, den offenen Kern und den Rand folgender Teilmengen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^2$:

(a) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist irrational}\}$

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

(a) Man zeigt zunächst $A^o = \emptyset$:

Sei also $1/n \in A$ beliebig und $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so, dass $1/n - \varepsilon < r < 1/n$ (da die irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$ dicht liegen), wegen $A \subset \mathbb{Q}$ ist $r \notin A$ und damit $K_\varepsilon(1/n) \not\subset A$, i.e. $1/n \notin A^o$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Weiter ist $A^- = A \cup \{0\}$.

Wegen $1/n \to 0$ ist sicher $0 \in A^-$, man zeigt nun, dass $A \cup \{0\}$ abgeschlossen ist, i.e. sein Komplement offen ist, damit ist dann alles gezeigt: Sei also $r \in \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$ beliebig, man unterscheidet die Fälle:

- Es ist $r < 0$, dann ist sicher $|r|/2 > 0$ und wegen $A \subset \,]0, +\infty[$ ist $K_{|r|/2}(r) \subset \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$.
- Es ist $r > 1$, dann ist $|r - 1|/2 > 0$ und es ist wegen $\max A = 1$ sicher $K_{|r-1|/2}(r) \subset \mathbb{R} \setminus (A \cup \{0\})$.
- Es ist $0 < r < 1$, wähle $n \in \mathbb{N}$ maximal mit $r < 1/n$, dann ist nach Wahl von $n \in \mathbb{N}$ sicher

$$\frac{1}{n+1} < r < \frac{1}{n}$$

und es ist $A \cap]\,1/(n+1), 1/n\,[= \emptyset$. Da diese Menge offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$K_\varepsilon(r) \subset \,]\,1/(n+1), 1/n\,[$$

dann ist $(A \cup \{0\}) \cap K_\varepsilon(r) = \emptyset$.

Also ist $A^- = A \cup \{0\}$.

Es ergibt sich noch, dass

$$\partial A = A^- \setminus A^o = A^- = A \cup \{0\}.$$

(b) Man zeigt zunächst $B^o = \emptyset$:

Sei $b \in B$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $b - \varepsilon < q < b$, da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist. Es ist $q \notin B$ und damit ist $K_\varepsilon(b) \not\subset B$, d.h. $b \notin B^o$, also $B^o = \emptyset$.

Nun zeigt man $B^- = \mathbb{R}$:

Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, wähle nach dem Dichtheitssatz ein $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit

$$\frac{r - \varepsilon}{\sqrt{2}} < q < \frac{r + \varepsilon}{\sqrt{2}},$$

dann ist $q\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (sonst wäre $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$), also $q\sqrt{2} \in B$ und $q\sqrt{2} \in K_\varepsilon(r)$, also ist $K_\varepsilon(r) \cap B \neq \emptyset$, d.h. $r \in B^-$ und damit $B^- = \mathbb{R}$.

Es ergibt sich noch, dass $\partial B = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

(c) Man zeigt zuerst, dass $C^o = \emptyset$:

Sei $c = (x, y) \in C$ und $\varepsilon > 0$, dann ist

$$(x, y + \varepsilon) \in K_\varepsilon(c)$$

aber $(x, y + \varepsilon) \notin C$, da $x \neq y + \varepsilon$ wegen $x = y$ und $\varepsilon > 0$, also ist $c \notin C^o$.

Nun zeigt man, dass C abgeschlossen (und damit $C^- = C$) ist:

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x - y$ ist als Polynom stetig und damit ist $C = f^{-1}(0)$ als stetiges Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

Es folgt noch dass $\partial C = C \setminus \emptyset = C$.

(d) Man zeigt zunächst, dass D offen ist (und damit $D^o = D$):

Betrachte die Projektion $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y$, diese Abbildung ist stetig, und damit ist

$$D = p_2^{-1} \,]0, +\infty[$$

als stetiges Urbild einer offenen Menge offen.

Nun zeigt man $D^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$:

Sei also $x \in \mathbb{R}$ beliebig, man zeigt $(x, 0) \in D^-$ und damit $\subset$ (denn $D \subset D^-$). Es ist $1/n \to 0$, und damit $(x, 1/n) \to (x, 0)$, da Konvergenz in $\mathbb{R}^2$ koordinatenweise Konvergenz bedeutet. Wegen $(x, 1/n) \in D$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ folgt dass $(x, 0) \in D^-$.

Es reicht nun zu zeigen, dass $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ abgeschlossen ist (denn D^- ist die kleinste D umfassende abgeschlossene Menge), dass folgt aber sofort aus

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} = p_2^{-1} \,[0, +\infty[$$

und der Stetigkeit der Projektion.

Es folgt noch, dass

$$\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \setminus D = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

3.1.2 Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie, dass für den Rand der Einheitskugel $B = \{x \in X \mid \|x\| \le 1\}$ gilt:

$$\partial B = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}.$$

Die Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ist stetig und damit ist

$$B = \|\cdot\|^{-1}\,[\,0,1\,]$$

abgeschlossen und

$$\{x \in X \mid \|x\| < 1\} = \|\cdot\|^{-1}\,[\,0,1\,[$$

offen, d.h. es ist $B^- = B$ und $\{x \in X \mid \|x\| < 1\} \subset B^o$, man hat also noch $\|x\| = 1 \Rightarrow x \notin B^o$ zu zeigen.

Sei also $x \in X$ mit $\|x\| = 1$. Dann gilt wegen $\frac{n+1}{n} \to 1$, dass

$$\frac{n+1}{n}x \to x \quad \text{und} \quad \left\|\frac{n+1}{n}x\right\| = \frac{n+1}{n} > 1$$

und dass heißt $x \in (X \setminus B)^- = X \setminus B^o$ und damit $x \notin B^o$.

Also ist $B^o = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$ und damit

$$\partial B = B \setminus \{x \in X \mid \|x\| < 1\} = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}.$$

3.1.3 Man überprüfe auf Abgeschlossenheit, Offenheit und Kompaktheit:

1. $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} \subset \mathbb{R}$,
2. $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \ge 1,\ |z|^3 \le 3\} \subset \mathbb{C}$.

1. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, ist $2 - \varepsilon \notin A$, also ist $K_\varepsilon(2) \not\subset A$, d.h. A ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

   A ist aber abgeschlossen in $\mathbb{R}$: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere Cauchy-Folge, d.h. es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

   $$\underset{n,m \ge n_0}{\forall} |a_n - a_m| \le 1$$

   Seien nun $n \ge n_0$ beliebig, wäre $a_n \ne a_{n_0}$, so wäre $|a_n - a_{n_0}| \ge 2$, da A nur gerade Zahlen enthält, also ist $a_n = a_{n_0}$ für alle $n \ge n_0$ und somit (a_n) gegen a_{n_0} konvergent, da Limites in $\mathbb{R}$ eindeutig sind, folgt $a = a_{n_0} \in A$ und somit die Abgeschlossenheit von A.

   Als unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ (Archimedesaxiom!) kann A nicht kompakt sein.

2. Man zeigt zunächst, dass B nicht offen ist: Es ist $1 \in B$ wegen $|1|^2 = 1$ aber für kein $0 < \varepsilon < 1$ ist $1 - \varepsilon \in B$, denn es ist dann

   $$|1 - \varepsilon|^2 = (1 - \varepsilon)^2 < 1$$

denn $0 < 1 - \varepsilon < 1$. Damit ist für kein $\varepsilon > 0$: $K_\varepsilon(1) \subset B$ und damit ist B nicht offen.

Man zeigt nun, dass B abgeschlossen ist: Die Abbildungen $f : z \mapsto |z|^2$ und $g : z \mapsto |z|^3$ sind als Komposition stetiger Abbildungen selbst stetig, es folgt, dass

$$C_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 \geq 1\} = f^{-1}\,[\,1, +\infty\,[$$

und

$$C_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^3 \leq 3\} = g^{-1}\,[\,0, 3\,]$$

als stetige Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, und damit ist auch $B = C_1 \cap C_2$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

B ist aber auch kompakt: Da B abgeschlossen ist, reicht es zu zeigen, dass B beschränkt ist, sei also $z \in B$, dann ist

$$|z|^3 \leq 3 \iff |z| \leq 27,$$

also ist B durch 27 beschränkt und damit kompakt.

3.1.4 Welche der folgenden Mengen sind offen, abgeschlossen bzw. weder offen noch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ bezüglich der üblichen Metrik?

(a) $A = [\,-1, 3\,] \cup [\,4, 10\,]$

(b) $B = \big(\,]\,-5, 2\,[\; \cup \;]\,7, 22\,[\,\big) \cap \;]\,-3, 15\,[$

(c) $C = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

(d) $D = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.

(a) Beh.: A ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Als endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist A abgeschlossen, A ist aber nicht offen, da $10 \in A$, aber für kein $\varepsilon > 0$ ist $10 + \varepsilon \in A$, also $K_\varepsilon(10) \not\subset A$ für jedes $\varepsilon > 0$.

(b) Beh.: B ist offen, aber nicht abgeschlossen.

Zunächst gilt nach de Morgan:

$$\begin{aligned} B &= \big(\,]\,-5, 2\,[\, \cap \,]\,-3, 15\,[\,\big) \cup \big(\,]\,7, 22\,[\, \cap \,]\,-3, 15\,[\,\big) \\ &= \;]\,-3, 2\,[\, \cup \,]\,7, 15\,[\end{aligned}$$

und B ist als Vereinigung offener Intervalle offen.

B ist aber nicht abgeschlossen, da $15 - \frac{1}{n} \in B$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ aber $15 \notin B$, obwohl $15 - \frac{1}{n} \to 15$.

(c) Beh.: C ist weder offen noch abgeschlossen.

Es ist $1 \in C$ aber $K_\varepsilon(1) \not\subset C$ für jedes $\varepsilon > 0$ wegen $1 + \varepsilon > 1$, also $1 + \varepsilon \notin C$, somit ist C nicht offen.

Es ist $1/n \in C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $1/n \to 0$, also ist C wegen $0 \notin C$ nicht abgeschlossen.

(d) Beh.: D ist abgeschlossen aber nicht offen.

Zunächst ist D aus demselben Grunde wie C nicht offen, s.u. (c).

Man zeigt nun, dass $\mathbb{R} \setminus D$ offen ist, dies wurde aber unter 3.1.1(a) bewiesen, siehe dort.

3.1.4 Für welche $a \geq 1$ ist $]\,0,1\,[$ abgeschlossen in $]\,0,a\,[$?

Beh.: Nur für $a = 1$.

Für $a = 1$ ist $]\,0,1\,[\, = \,]\,0,a\,[$ der ganze Raum, also abgeschlossen.

Für $a > 1$ ist aber $1 \in \,]\,0,a\,[$, wegen

$$1 - \frac{1}{2n} \to 1$$

in $]\,0,a\,[$ ist $]\,0,1\,[$ in $]\,0,a\,[$ nicht abgeschlossen für $a > 1$.

3.1.5 Die Menge

$$L = \left\{ (a,b,c,d) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Das Gleichungssystem} \\ \quad \begin{array}{rcl} ax + by & = & 1 \\ cx + dy & = & 2 \end{array} \\ \text{ist eindeutig lösbar.} \end{array} \right\}$$

ist offen im $\mathbb{K}^4$.

Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar genau dann, wenn (Lineare Algebra)

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ac - bd \neq 0$$

gilt. Da $\det : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}$, $(a,b,c,d) \mapsto ac - bd$ als Polynom stetig ist, ist

$$L = \det^{-1}\big(\mathbb{K} \setminus \{0\}\big)$$

als stetiges Urbild einer offenen Menge offen in $\mathbb{K}^4$.

zu 3.2

3.2.1 Sei (M,d) ein metrischer Raum, in dem jede Teilmenge abgeschlossen ist. Was lässt sich dann über die kompakten Teilmengen von M aussagen?

Beh.: Genau die endlichen Teilmengen von M sind kompakt.

Da endliche Mengen stets kompakt sind, reicht es zu zeigen, dass jede kompakte Teilmenge von M endlich ist.

Sei also $K \subset M$ kompakt. Wäre K nicht endlich, so gäbe es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K so dass $x_n \neq x_m$ für $n \neq m$ gilt, diese kann aber keine konvergente Teilfolge enthalten: Jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat paarweise verschiedene Glieder. Wir zeigen, dass keine solche Folge in M konvergiert: Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die gegen $y \in M$ konvergiert. Da $M \setminus \{y\}$ n.V. abgeschlossen ist, ist $\{y\}$ offen in M, aus $y_n \to y$ folgt also dass $y_n \in \{y\}$ für alle $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ geeignet), also ist $y_n = y$ f.a. $n \geq n_0$ und (y_n) kann keine paarweise verschiedenen Glieder haben.

Also ist K endlich und genau die endlichen Teilmengen sind kompakt.

3.2.2 Bestimmen Sie die kompakten Teilmengen des Raumes $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, der mit der von $\mathbb{R}$ geerbten Metrik versehen sei.

Beh.: $K \subset M := \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist kompakt genau dann, wenn K endlich ist oder die 0 enthält.

$\Rightarrow$ Sei also $K \subset M$ kompakt und nicht endlich, wir haben $0 \in K$ zu zeigen.

Da K abgeschlossen ist, reicht es dazu zu zeigen, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K existiert, die gegen 0 konvergiert. Da K nach Voraussetzung unendlich ist, gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K mit paarweise verschiedenen Gliedern. Wir zeigen $x_n \to 0$:

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $m \in \mathbb{N}$ mit $1/m < \varepsilon$ nach dem Archimedesaxiom. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschiedene Glieder hat, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$x_n \notin \{1/k \mid 1 \leq k \leq m\}$$

für alle $n \geq n_0$, da die rechtsstehende Menge endlich ist, für diese n ist dann aber

$$x_n \leq 1/m < \varepsilon$$

da alle Elemente von $M \setminus \{1/k \mid 1 \leq k \leq m\}$ kleiner gleich $1/m$ sind. Das zeigt $x_n \to 0$, also $0 \in K$.

$\Leftarrow$ Da endliche Mengen stets kompakt sind, sei nun $K \subset M$ unendlich und gelte $0 \in K$. Da $K \subset M$ sicher beschränkt ist, reicht es zu zeigen, dass K abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K, die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Zu zeigen ist $x \in K$.

Sicher ist zunächst $x \geq 0$ und $x \leq 1$, da $K \subset [0,1]$ und diese Menge abgeschlossen ist. Angenommen nun $x \notin K$, dann ist $x > 0$ wegen $0 \in K$, es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ nach Archimedes, so dass $1/m < x$, d.h. $x \in]1/m, 2[$. Da diese Menge offen ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall_{n \geq n_0}\ x_n > 1/m \Rightarrow x_n \in K_0 := K \cap]1/m, 1] \subset \{1/k \mid 1 \leq k < m\}.$$

Die Menge K_0 ist endlich, setze

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{2}\min\{|k - x| \mid k \in K_0\} > 0$$

Nun ist sicher

$$K_{\varepsilon_0}(x) \cap K = \emptyset$$

was $x_n \to x$ widerspricht. Also ist $x \in K$ und das zeigt die Behauptung.

3.2.3 Kann es einen unendlichen Raum geben, in dem jede Teilmenge kompakt ist?

Nein. Denn dann ist jede Teilmenge auch abgeschlossen im ganzen Raum, dann sind nach 3.2.1 genau die endlichen Teilmengen kompakt, also muss der ganze Raum (als kompakte Teilmenge) endlich sein.

3.2.4 Man beweise: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\hat{\mathbb{R}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$ für jede Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n > 0$.

Sei $M > 0$. Wegen $a_n \to +\infty$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\bigvee_{n\geq n_0} a_n \geq \frac{M}{\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n}$$

Für diese n ist aber

$$\begin{aligned} a_n b_n &\geq a_n \cdot \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \\ &\geq \frac{M}{\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n} \cdot \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n \\ &= M. \end{aligned}$$

Da $M > 0$ beliebig war, folgt $a_n b_n \to +\infty$.

3.2.5 Zeigen Sie: $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt in ℓ^∞ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.
Dabei ist e_n die Folge $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$, die 1 steht an der n-ten Stelle.

Man zeigt, dass $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine $\|\cdot\|_\infty$–konvergente Teilfolge hat: Sei $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge von $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und sei $x = (x_n) \in \ell^\infty$. Wir zeigen $e_{n_k} \not\to x$.

Gälte $e_{n_k} \to x$, so gäbe es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq k_0$:

$$\|e_{n_k} - x\|_\infty \leq \frac{1}{4}$$

Insbesondere wäre (betrachte die n_{k_0}-te Stelle):

$$\begin{aligned} \left|x_{n_{k_0}} - 1\right| &= \left|x_{n_{k_0}} - \left(e_{n_{k_0}}\right)_{n_{k_0}}\right| \\ &\leq \left\|e_{n_{k_0}} - x\right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{4} \\ \iff x_{n_{k_0}} &\in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right] \end{aligned}$$

Andererseits aber auch

$$\begin{aligned} \left|x_{n_{k_0}}\right| &= \left|x_{n_{k_0}} - 0\right| \\ &= \left|x_{n_{k_0}} - \left(e_{n_{k_0+1}}\right)_{n_{k_0}}\right| \\ &\leq \left\|e_{n_{k_0+1}} - x\right\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{4} \\ \iff x_{n_{k_0}} &\in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, was $x_{n_k} \not\to x$ beweist.

Also ist $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht kompakt.

zu 3.3

3.3.1 Es sei $f : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in [\,0,1/2\,]$ existiert mit $f(c) = f(c+1/2)$.

Betrachte die Funktion $g : [\,0,1/2\,] \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto f(x) - f(x+1/2)$. Als Komposition stetiger Abbildungen ist g stetig, weiterhin ist

$$g(0) = f(0) - f(1/2) = f(1) - f(1/2) = -g(1/2)$$

Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $c \in [\,0,1/2\,]$ mit $g(c) = 0$, d.h. aber

$$g(c) = 0 \iff f(c) - f(c+1/2) = 0 \iff f(c) = f(c+1/2).$$

3.3.2 Zeigen Sie:

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}\,,\; f(x) = \frac{1}{x-3}$ ist nicht gleichmäßig stetig,

2. und $g : \mathbb{R} \setminus [2,4] \to \mathbb{R}\,,\; g(x) = \frac{1}{x-3}$ ist eine Lipschitzabbildung.

1. Zu zeigen ist doch

$$\exists_{\varepsilon>0}\, \forall_{\delta>0}\, \exists_{x,y\in\mathbb{R}\setminus\{3\}} \; |x-y| \le \delta \wedge |f(x)-f(y)| \ge \varepsilon.$$

Setze $\varepsilon := 1$, sei $\delta > 0$ beliebig, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $1/2n \le \delta$ und setze $x := 3 + 1/n$, $y := 3 + 1/2n$, dann ist

$$|x-y| = \left|3 + \frac{1}{n} - 3 - \frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} \le \delta$$

und

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= \left|\frac{1}{x-3} - \frac{1}{y-3}\right| \\ &= \left|\frac{1}{1/n} - \frac{1}{1/2n}\right| \\ &= |n-2n| \\ &= n \ge 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f nicht gleichmäßig stetig.

2. Man zeigt, dass g eine Lipschitzabbildung zur Lipschitzkonstanten 1 ist, d.h.

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}\setminus[\,2,4\,]} \; |g(x)-g(y)| \le |x-y|.$$

Seien also $x, y \in \mathbb{R} \setminus [\,2,4\,]$ beliebig, dann ist $|x-3| \ge 1$ und $|y-3| \ge 1$

und damit

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\frac{1}{x-3} - \frac{1}{y-3}\right| \\
&= \left|\frac{y-3-x+3}{(x-3)(y-3)}\right| \\
&= \frac{|x-y|}{|x-3||y-3|} \\
&\leq \frac{|x-y|}{1 \cdot 1} \\
&= |x-y|
\end{aligned}$$

Also ist g eine Lipschitzabbildung.

3.3.3 Es sei $f : [\,0,1\,] \to [\,0,1\,]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f dann einen Fixpunkt besitzt. D.h., es gibt ein $x \in [\,0,1\,]$ mit $f(x) = x$.

Man betrachte die (stetige!) Funktion $g : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto f(x) - x$, wegen $f(0), f(1) \in [\,0,1\,]$ gilt zunächst

$$0 \leq f(0) = f(0) - 0 = g(0)$$

und

$$f(1) \leq 1 \iff 0 \geq f(1) - 1 = g(1)$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $x \in [\,0,1\,]$ mit $g(x) = 0$, da g stetig ist, und das heißt

$$g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x,$$

also hat f einen Fixpunkt.

3.3.4 Ist $f : [\,0,1\,[\, \to \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sqrt[5]{x}$

1. gleichmäßig stetig,
2. sogar eine Lipschitzabbildung?

1. Beh.: Ja, f ist gleichmäßig stetig.

   Man betrachte $g : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto \sqrt[5]{x}$. g ist als stetige Funktion auf einem kompakten Intervall sogar gleichmäßig stetig, also ist auch $f = g|_{[\,0,1\,[}$ gleichmäßig stetig.

2. Beh.: Nein, f ist keine Lipschitzabbildung.

   Zu zeigen ist doch, dass

   $$\forall_{L \geq 0}\ \exists_{x,y \in [\,0,1\,[}\ |f(x) - f(y)| > L|x-y|$$

   Man betrachte $h : [\,0,1\,[\, \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^{4/5}$, h ist stetig, also gilt $h(x) \to 0$ für $x \to 0$. Sei nun $L \geq 0$ beliebig, wähle ein $x \in [\,0,1\,[$ mit

   $$0 < h(x) \leq \frac{1}{L+1}$$

Setze $y := 0$, es ist

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{0}\right| \\
&= \sqrt[5]{x} \\
&= \frac{x}{x^{4/5}} \\
&= \frac{x}{h(x)} \\
&\geq (L+1)|x| \\
&= (L+1)|x-y|
\end{aligned}$$

Also ist f keine Lipschitzabbildung.

3.3.5 Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn dafür der Zwischenwertsatz richtig ist, wenn also gilt:

> Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $x, y \in I$, so tritt jedes c zwischen $f(x)$ und $f(y)$ als Bildwert auf.

$\Rightarrow$ Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ steitg und $x, y \in I$, o.E. $x < y$, sowie $c \in \mathbb{R}$ zwischen $f(x)$ und $f(y)$ gegeben. Wendet man den Zwischenwertsatz auf $f|_{[\,x,y\,]}$ an, so erhält man ein $z \in [\,x, y\,]$ mit $f(z) = c$. Da I ein Intervall ist, ist $z \in I$, damit ist alles gezeigt.

$\Leftarrow$ Sei $I \subset \mathbb{R}$ so, dass für jedes stetige f der Zwischenwertsatz gilt.

Wir zeigen $]\inf I, \sup I\,[\; \subset I$, dann muss I ein Intervall sein, denn I kann höchstens noch zusätzlich $\inf I$ oder $\sup I$ enthalten. Sei also $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\inf I < \xi < \sup I$, zu zeigen ist $\xi \in I$. Wäre $\xi \notin I$, so wäre $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(x - \xi)$ eine stetige Abbildung. Wegen $\inf I < \xi$ gibt es $x_0 \in I$ mit $x_0 < \xi$ und wegen $\xi < \sup I$ ein $x_1 \in I$ mit $\xi < x_1$, nun ist aber

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0 - \xi} < 0, \quad f(x_1) = \frac{1}{x_1 - \xi} > 0$$

also ist $f(x_0) < 0 < f(x_1)$ aber es ist $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, das widerspricht der Gültigkeit des Zwischenwertsatzes, also ist $\xi \in I$.

Also ist

$$]\inf I, \sup I\,[\; \subset I \subset [\,\inf I, \sup I\,]$$

und I ist damit ein Intervall.

3.3.6 Für eine Teilmenge K von $\mathbb{R}$ sind äquivalent:

- K ist kompakt.
- Jede stetige reellwertige Funktion auf K ist beschränkt.

Das aus der ersten Aussage die zweite folgt, ist bereits bekannt, es reicht also die Umkehrung zu zeigen.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Man zeigt dies indirekt. Sei also $K \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt, zu zeigen ist, dass es eine unbeschränkte stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ gibt. Man unterscheidet zwei Fälle:

- K ist unbeschränkt. Dann ist sicher $f : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ stetig und unbeschränkt, denn: Sei $M \geq 0$, da K unbeschränkt ist, existiert $x \in K$, so dass $|x| \geq M$, dann ist aber

$$|f(x)| = |x| \geq M,$$

also ist f unbeschränkt.

- K ist beschränkt, da K nicht kompakt ist, kann K dann nicht abgeschlossen sein, also gibt es $a_n \in K$ und $a \in \mathbb{R} \setminus K$ mit $a_n \to a$. Betrachte nun $f : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(x - a)$. f ist stetig, da $a \notin K$.

  Man zeigt, dass f unbeschränkt ist: Sei $M \geq 0$, wegen $a_n \to a$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{M+1}$$

Es folgt, dass

$$|f(a_n)| = \frac{1}{|a_n - a|} \geq \frac{1}{1/(M+1)} = M + 1 > M.$$

wegen $a_n \in K$ ist f auf K unbeschränkt.

Es gibt also ein stetiges unbeschränktes $f : K \to \mathbb{R}$, falls $K \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

3.3.7 Für eine Teilmenge K von $\mathbb{R}$ sind äquivalent:

- K ist kompakt.
- Jede stetige reellwertige Funktion nimmt Maximum und Minimum an.
- Für jede auf K definierte stetige Funktion f ist $f(K)$ kompakt.

Wieder ist (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) die Aussage bekannter Sätze, es reicht also die Umkehrungen zu zeigen:

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist $K \subset \mathbb{R}$ nicht kompakt, so gibt es nach 3.3.6(ii) eine unbeschränkte Funktion $f : K \to \mathbb{R}$, diese hat dann kein Maximum oder Minimum und kann dieses also auch nicht annehmen.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Betrachte $f : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Diese Funktion ist stetig, also ist nach Voraussetzung $f(K) = K$ kompakt.

3.3.8 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar; ist dann f' beschränkt, so ist f gleichmäßig stetig. Gilt auch: Ist f differenzierbar und gleichmäßig stetig, so ist f' beschränkt?

Sei also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei

$$L := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < +\infty$$

man zeigt, dass f sogar Lipschitz zur Konstanten L ist: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, o.E. $x < y$ nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi \in \,]\,x, y\,[$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

es folgt, dass

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y|.$$

Also ist f Lipschitzabbildung und damit gleichmäßig stetig.

Die Umkehrung ist falsch: Betrachte $f : [\,0, 1\,] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^{3/2} \sin(1/x)$ sonst. Sicher ist f auf $]\,0, 1\,]$ differenzierbar, man zeigt zunächst die Differenzierbarkeit von f bei 0, es ist

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| &= \left|\frac{h^{3/2} \sin(1/h)}{h}\right| \\
&= \left|\sqrt{h} \sin(1/h)\right| \\
&\leq \left|\sqrt{h}\right| \to 0, \quad h \to 0^+
\end{aligned}$$

Also ist f in 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$ und damit auch stetig in 0. Als stetige Funktion auf der kompakten Menge $[\,0, 1\,]$ ist f auch gleichmäßig stetig. Man zeigt nun, dass f' nicht beschränkt ist, für $x \neq 0$ ist nämlich

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3}{2} x^{1/2} \cdot \sin \frac{1}{x} - x^{3/2} \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \\
&= \frac{3}{2} x^{1/2} \cdot \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

und diese Funktion ist unbeschränkt:

Sei $M > 0$ beliebig, wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > M^2/\pi$ und $x := 1/n\pi$, dann ist

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \left|\frac{3}{2} x^{1/2} \cdot \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos \frac{1}{x}\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \cos \frac{1}{x}\right| - \left|\frac{3}{2} x^{1/2} \cdot \sin \frac{1}{x}\right| \\
&\geq \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \cdot \left|\cos \frac{1}{x}\right| \\
&= \left|\frac{1}{\sqrt{1/n\pi 0}}\right| \cdot \left|\cos \frac{1}{1/n\pi}\right| \\
&= \sqrt{n\pi} \cdot |\cos(n\pi)| \\
&> \sqrt{M^2} = M.
\end{aligned}$$